Ali Nesin

Matematik ve Doğa

NESİN MATEMATİK KÖYÜ

Ali Nesin Matematik ve Doğa

Ali Nesin

1956'da İstanbul'da doğdu. İlkokuldan sonra ortaokulu İstanbul'da Saint Joseph Lisesi'nde, liseyi de İsviçre'nin Lozan kentinde tamamlayan Nesin 1977-1981 yılları arasında Paris VII Üniversitesi'nde matematik öğrenimi gördü. Daha sonra ABD'de Yale Üniversitesi'nde matematiksel mantık ve cebir konularında doktora ve 1985-86 arasında UC Berkeley'de öğretim üyeliği yaptı.

Türkiye'ye kısa dönem askerlik görevi için geldiği sırada "orduyu isyana teşvik" iddiasıyla tutuklanarak, yargılandı. Yargılama sonunda beraat ettiği halde pasaport verilmediği için işine dönemeyen Nesin, ancak bir buçuk yıl sonra yurtdışma gidebildi. 1987-89 arasında Notre Dame Üniversitesi'nde yardımcı doçent, ardından 1995'e kadar UC Irvine'da önce doçent, daha sonra profesör olarak görev yaptı.

Halen İstanbul Bilgi Üniversitesi Matematik Bölümü başkanı ve Nesin Vakfı yöneticisidir. Yazar ayrıca Matematik Dünyası adlı popüler matematik dergisinin yazıişleri müdürü ve Şirince'deki Nesin Vakfı'na bağlı Nesin Matematik Köyü'nün kurucusudur.

Nesin Yayıncılık A.Ş.
İnönü Mahallesi Çimen Sokak No: 50/A Elmadağ Şişli/İstanbul
Tel: 0212 291 49 89 • Faks: 0212 234 17 77
nesin@nesinyayinevi.com • www.nesinyayinevi.com

Ali Nesin
Matematik ve Doğa

Karikatürler: Tayfun Akgül

İlk basım, Düşün Yayınları, İstanbul, 1995

Nesin Yayınevi'nde birinci basım Aralık 2007 (2000 adet)
Nesin Yayınevi'nde ikinci basım Mayıs 2010 (1000 adet)
Nesin Yayınevi'nde üçüncü basım Eylül 2011 (1000 adet)
Nesin Yayınevi'nde dördüncü basım Haziran 2012 (1000 adet)

Popüler Matematik Kitapları
Nesin Matematik Köyü Kitaplığı: 4

004 01 01 003 - 68
ISBN 978-975-9038-90-8
Sertifika No: 18231

Editör
Ali Nesin

Grafik Danışmanı
İlhan Bilge

Dizgi ve iç sayfa tasarımı
Aslı Can Korkmaz

Baskı ve cilt
Yazın Basın Yayın Matbaa Turizm Tic. Ltd. Şti.
Çiftehavuzlar Mah. Prestij İş Merkezi No: 27/806 Zeytinburnu/İstanbul
Tel: 0212 565 01 22 Sertifika No: 12028

Ali Nesin

Matematik ve Doğa

NESİN MATEMATİK KÖYÜ

İçindekiler

Üçüncü Basıma Önsöz

Bu kitapta 1994-95 dersyılında yazdığım ve çoğunluğu *Bilim ve Ütopya* dergisinde yayımlanan popüler matematik yazılarım bulacaksınız. Yazılar birbirinden bağımsızdır. Okur dilediği yazıyı dilediği zaman okuyabilir.

Yazıların lise öğrencilerince anlaşılır olmasına özel bir özen gösterdim. Düşünmeyi seven ortaokul öğrencilerinin de çoğu yazıyı anlayabileceğine inanıyorum. İyi bir öğretmenin kimi yazıların içeriğini ilkokul öğrencilerine anlatabileceğini düşünüyorum. Kanımca, *Gizli Kenarlar*, *Üç Oyun*, *Ardışık Sayıların Toplamı*, *Kimin Kazandığı Bilinen Ama Nasıl Kazandığı Bilinmeyen Bir Oyun*, *Boyalı Noktalar* başlıklı yazılar ilkokul öğrencilerinin hoş zaman geçirecekleri soruları/oyunları içeriyor. Bu sorular bir oyun biçiminde öğrencilere sunulursa, öğrenciler ayrımına varmadan matematiksel araştırmaya dalarlar.

Zamanı olan okurun yazıları okumadan önce yazılarda sorulan sorular üzerinde düşünmesini öneririm. Her soru kolay olmayabilir. Hatta her sorunun kolay olmadığına dair güvence verebilirim. Dolayısıyla okur yanıtları hemen bulamayabilir. Bir iki gün içinde, bir hafta içinde de bulamayabilir. Hangi sorunun kolay, hangi sorunun zor olduğunu da okura söylemedim, çün-

kü araştırmacı da kendi kendine sorduğu sorunun zor mu kolay mı olduğunu her zaman bilemez. Ancak deneyimli matematikçiler bir sorunun zorluk derecesini sezebilirler, o da her zaman değil ve ancak kendi konularında. Bu yüzden yanıtı hemen bulamayan okur karamsarlığa kapılmamalıdır. Önemli olan yanıtı bulmak değil, inatçı olmak, meraklanmak, bir problem üzerine yoğunlaşabilmek ve araştırmadan zevk almasını öğrenmektir. Okur bir hafta boyunca kafasında bir soruyla dolaşsın. Ayrımına varmadan düşünecek ve soru kafasında olgunlaşacaktır. Uykusunda bile soruyla ilgilenecektir. Yanıtlamaya çalışacağı her soru okura yeni sorular sordurtacaktır ve okur işte o zaman matematikçi olacaktır. En az bir gün, en çok bir hafta sonra okur yanıtı okusun. Yanıtı kendi kendine bulamamış olsa bile, verdiğim yanıtı daha iyi anlayacaktır.

Yukardaki satırları yazdıktan bir ay sonra Türkiye'ye geldim ve birkaç lise öğrencisiyle konuşma olanağı buldum. Konumuz matematikti doğal olarak. Yazılarımı okuyup okumadıklarını sordum. Okumaya çalıştıklarını, ama anlayamadıklarını söylediler. Her yazı anlaşılmayabilir elbet; yazı iyi yazılmamış olabilir, yazının düzeyi yüksek gelebilir, okurun kafası o gün başka bir konuyla meşgul olabilir, çeşitli nedenlerle bir iki yazı anlaşılmamış olabilir. Bu doğaldır. Matematikçiler bile her okudukları matematik yazısını anlamazlar. Ancak, görüştüğüm lise öğrencileri hiçbir yazımı anlamıyorlarmış. En kolay anlaşılacağını sandığım yazıları bile anlayamamışlar. Doğrusu şaşırdım ve üzüldüm. Üstelik içlerinden birkaçı fen bölümündeydi ve lise 2'ye geçmişlerdi. Düzeyi tutturamadığımı sanıp suçlu duyumsadım kendimi.

Biraz daha tartışınca asıl suçlunun ben olmadığını anladım. Lise 2 fen bölümüne giden bu öğrenciler "çift sayı" kavramının tanımını veremiyorlardı. Hangi tamsayının çift, hangi

tamsayının tek olduğunu biliyorlardı ama, "2'ye bölünen tamsayılara çift sayı denir," diyemiyorlardı. Şu "tanımları" veriyorlardı:

– 2'nin güçleri...

– Kendinden başka sayıya bölünmeyen sayılar...

En iyileri,

– 2, 4, 6, 8 gibi sayılar... diyebiliyorlardı.

Belli ki soyutlama, genelleme, tanımlama gibi matematik yapmak ve sağlıklı düşünmek için gerekli niteliklerden yoksundular.

Ne diyeceğimi şaşırdım. Üzülmek mi yoksa başkaldırmak mı gerekir bir türlü karar veremedim. Demek eğitim bu hale düşürülmüş. Yazıklar olsun!

Gençlerden ve düzenden durmadan yakınan yaşlılar vardır; gençliklerinde her şeyin daha iyi olduğunu söyler dururlar ve bu sözleriyle gençlerin başlarının etini yerler. Aynı duruma düşmek istemem, kaldı ki ben yaşlı da değilim, kırkıma daha basmadım bile! Ama nasıl yakınmam! Benim zamanımda ilkokul öğrencileri bile çift sayı kavramının tanımını verebilirlerdi. Bugün fen bölümü öğrencileri bu tanımı bilmiyorlar. Yirmi beş yılda eğitimi bu hale nasıl getirebildik?

1962'den 1973'e dek Türkiye'de eğitim gördüm. İlkokulu, hazırlık sınıflarını ve ortaokulu Türkiye'de okudum. Akıllı çocuklardık. Eğitimin iyi olmadığını görüyorduk. Görmemek olası mıydı? Ne kitaplarda, ne de bir ikisi dışında öğretmenlerde iş vardı. Ama Türkiye yoksul bir ülke ve yoksul bir ülkenin eğitimi de ancak bu kadar olur, diye düşünüyorduk. Yıllar geçtikçe, Türkiye kalkınsa da kalkınmasa da, eğitimin düzeleceğinden, düzelmese bile biraz olsun iyileşeceğinden hiçbirimizin en küçük, şuncacık bir kuşkusu yoktu. Buna öylesine inanıyorduk ki, bu düşünceyi yüksek sesle söylemek, "güneş sabah doğar akşam batar" gibi bir

hepdoğru söylemeye benzerdi. Biri, "yıllar geçtikçe eğitim kötüleşecek," deseydi, güler geçerdik. Kısacası **İlerleme**'ye inanmıştık.

O zamanlar Türkiye'de ortaokul 3'te düzlem geometrisi okutulurdu. Hem de kanıtlarıyla birlikte... Çok iyi anımsıyorum, benden bir yaş büyük komşu kız arkadaşım orta 3'e geçmişti. Ben daha orta 2'deydim. Matematikte ne okuduklarını sordum bir gün.

– İspat yapıyoruz, dedi. (O zamanlar "kanıt" denmezdi.)

Şaşırdım.

– Ne ispatlıyorsunuz? diye sordum.

– Neyi olacak, dedi, teorem ispatlıyoruz... Neyin neden doğru olduğunu anlıyoruz...

İyice şaşırdım.

– Mesela? diye sordum.

– Mesela bir üçgenin içaçılarının toplamının neden 180 derece olduğunu anlıyoruz...

Ağzım açık kaldı. Neyin neden doğru olduğunu anlıyorlarmış... Matematiği gözümde büyüttüm de büyüttüm. Daha önce hiç duymadığım, hiç bilmediğim bir dünya benim olacaktı bir yıl sonra. Nerdeyse, bir yıl bekleyemeyip, komşu kızın sınıfına gidecektim, öylesine meraklanmıştım.

Bir yıl sonra biz de okuduk o konuları. Matalon adında harika bir matematik hocamız vardı. Yıl sonunda, kırk kişilik sınıfımızın hemen hemen tümü matematiksel bir kanıtın ne demek olduğunu anlayabilecek, yarısı da kendi kendine kanıt yapabilecek düzeye gelmişti.

Saint Joseph'teydim. İyi okuldu Saint Joseph. Sınavla öğrenci alırdı. Öyle bir okulda eğitimin de iyi olması gerekir elbet. Ama bugün en iyi okullarda bile kanıt görülmüyor.

1993-94 dersyılını Bilkent Matematik Bölümü'nde geçirdigimden biliyorum. Bilkent en yüksek puanlı öğrencileri alır.

Öğrenciler de gerçekten zeki ve çalışkandılar. Amerika'da okuttuğum öğrencilerden çok daha bilinçli ve olgundular. Ama kanıt nedir bilmiyorlardı ve matematik bilgileri çok ama çok kıttı. Her ne denli daha önceden uyarılmışsam da, düzeyin bunca düşük olabileceğini doğrusu öngörememiştım. İki üç hafta sonra, bir öğrenci yanıma yaklaşıp şöyle dedi:

– Hocam, bazen varsayıyoruz, bazen varsaymıyoruz... Şaşırdık kaldık. Bize ne zaman varsayıp ne zaman varsaymayacağımızı öğretir misiniz?..

Anladım ki verdiğim kanıtlardan hiçbir şey anlamamışlar. Bütün bir yıl boyunca teorem kanıtladık durduk. Zeki, çalışkan, inatçı, bilinçli ve sorumlu gençler olduklarından çabuk (birkaç ayda) öğrendiler. Bu öğrenci arkadaşlarımın birkaçının çok iyi matematikçi olacağına inanıyorum.

Diyesim şu ki, Türkiye'de eğitim bir rezalet! Eskiden de kötüydü ama hiçbir zaman bu düzeye düşmemişti, daha doğrusu düşürülmemişti. Yirmi yıl önce aklımıza gelmeyeni başarmışlar. Bir kez daha yazıklar olsun!

Nasıl bizler aldığımız eğitimin kötü olduğunun ayrımına varmışsak, inanıyorum ki bugünkü gençler de eğitimlerinin kötü olduğunun ayrımına varmışlardır. Konumuz matematik olduğundan matematiği ele alalım: Bugün okullarda matematik okuduklarını sananlar yanılıyorlar. Bugün okullarda okutulan matematik değildir. Kanıtsız matematik olmaz. Matematik, doğru yanıtı bulma sanatı değildir. Matematik, doğru yanıtın neden doğru yanıt olduğunu anlama sanatıdır. Örneğin bu kitaptaki çoğu yazı - tam anlamıyla - matematik yazısıdır.

Eğitimi bu hale getirenlere - örneğin gelmiş geçmiş Milli Eğitim Bakanlığı sorumlularına - söyleyecek bir sözüm yok. Onlar bu kitabın önsözünü okumayacakları gibi, onların böyle bir kitabın çıktığından haberleri bile olmayacaktır. Ancak, bu kita-

bı okumaya heveslenen gençlere bir iki sözüm var. Bu kitaptaki soruları yanıtlamakta güçlük çekebilirsiniz. Bu doğaldır. Daha önce de söylemiştim, yanıtı hemen şıp diye bulunacak sorular sormadım. Ama eğer verdiğim yanıtları, açıklamaları ve kanıtları anlayamıyorsanız ve bir ikisini değil, hiçbirini anlamıyorsanız, o zaman bilin ki eğitiminizde büyük bir eksiklik var demektir. Bunun suçu sizin değildir elbette. Bugünkü eğitim sistemimizden siz sorumlu değilsiniz.

Her ne denli eğitim sistemimizin bugünkü halinden sorumlu değilseniz de, hem kendinizin hem de Türkiye'nin geleceğinden sorumlusunuz. Bu eksikliğinizi gidermeniz kolay değildir. Çevrenizde size yardım edebilecek kişiyi büyük bir olasılıkla bulamayacaksınız. Bir başka deyişle tek başınızasınız. Sizden bu eksikliğinizi gidermenizi istemek, uçmanızı istemeye benzer. Olanaksızdır. Ama işte bu olanaksızı başarmaya çalışmalısınız. Eğer olanaksızı başarır da uçmayı öğrenebilirseniz, sizleri uçsuz bucaksız ve zekâyla bezenmiş pırıl pırıl bir dünya beklemektedir, düşünenlerin, olguyla yetinmeyip nedenleri araştıranların dünyası...

Bunları yazdıktan gene yaklaşık bir ay sonra, 14 yaşında, iki yıl hazırlık okuduğundan orta 1'e geçmiş bir genç kıza rasladım ve hayran kaldım. Çünkü yazılarımı çok severek okuyormuş... *Önermeler Mantığı* adlı kitabımı anlamakta güçlük çektiğini, ama öbür kitaplarımı anladığını ve çok sevdiğini söylemek iyiliğinde bulundu. Anlamakta güçlük çektiği kitap, lise, hatta üniversite düzeyinde yazılmıştı. O kitabı eline alması, anlamaya çalışması bile çok önemli. Salt bu gençkızın varlığı popüler matematik kitaplarım yazmak için harcanan emeğe değer. Demek ki umutsuzluğa kapılmamak gerekiyormuş.

Ali Nesin

Mayıs-Temmuz 1995

Konken Partisi

Bir çocukluk arkadaşımın karısı, adı gerekli değil, biz Ayşe Hanım diyelim, konkene çok düşkündür. Varsa yoksa konken... Kocasının anlattığına göre, gece rüyalarında bile konken oynarmış, sık sık "jokere perim", "rölans", "sürrölans", "hangi cehenneme gitti bu kupa onlusu" diye sayıklarmış. Yanındakinin eline bakacağım diye yataktan düştüğü bile olmuş. Hatta bir gece, tam sürrölanslı bir eli açacakken, kocasının horlamasıyla uyanmış ve bu yüzden kocasıyla bir hafta konuşmamış. Bir hafta sonra,

– Gelecek sefere boşarım seni, diye tehdit edip kocasının özürlerini kabul ettiğini kendine özgü bir biçimde belirtmiş.

İşte Ayşe Hanım konkene bu derece düşkündü.

Ayşe Hanım konkene yalnız düşkün değildi, konkeni ciddiye de alırdı. Doğrusu ben Ayşe Hanım'a hak veriyorum. Eğer bir insanın konkenden başka bir eğlencesi ve işi yoksa, gününün en az dörtte birini oyun masasında geçiriyorsa ve geriye kalan zamanında konken düşünüyorsa, o zaman o kişi konkeni gerçekten ciddiye almalı, çok çok ciddiye almalı, ne bileyim ben, konken kitapları okumalı, yoksa yazmalı, kuramsal olarak konuyla ilgilenmeli, çeşitli kâğıt dağılımı olasılıkları üzerinde durmalı, Konken Oyuncuları Derneği kurmalı... Bu dernek oyunun

kurallarını belirlemeli, oyun sırasında çıkabilecek anlaşmazlıkları çözmeye çalışmalı, örneğin sırası gelmeden kâğıt çeken oyuncuya verilecek cezayı kararlaştırmalı, konu üzerinde konferanslar düzenlemeli, hatta aylık bir dergi yayımlamalı. Dergide, konken masasının ideal boyutları, oyun sırasında pasta ve çay ikramının nasıl yapılması gerektiği, oyun salonunun ışıklandırılması ve havalandırılması, oyuncuların giyim kuşamı, yemek ve uyku düzeni, konkenin etiği, felsefesi, konkencinin duruşu filan gibi konular işlenmeli... Bu önerilerimi Ayşe Hanım'a ilettiğimde, Ayşe Hanım, önce bir kahkaha patlatmış, sonra da,

– O kadar da uzun boylu değil Ali Bey, o zaman konken oynamaya vakit kalmaz ayol, demişti. Her şeyin bir şeyi var...

♠

Ayşe Hanım dertliydi, çok dertliydi. Arkadaşlarıyla düzenlediği konken partilerinde ister istemez dedikodu yapılıyor, konkenin -Ayşe Hanım'ın kendi deyimiyle- "içine ediliyordu". Oysa Ayşe Hanım konkeni ciddi oynamak istiyordu.

Dert ki ne dert!

Dırdırsız konken oynayabilmek için bir süre kumarhaneye gitmiş Ayşe Hanım. Tanımadığı ve birbirini tanımayan insanlarla konken oynamış. Bu da çok can sıkıcıymış. Kimsenin ağzını bıçak açmıyormuş. Bu kadarı da fazlaymış. Konuşulsunmuş ama kıvamında konuşulsunmuş. Dedikodu yapılsınmış, hiç yapılmasın değilmiş, ama dedikodunun da bir sınırı varmış...

Şöyle bir çözüm bulmuş. Masaya oturan her üç konkencinin en az ikisi birbirini tanımalıymış, ki biraz sohbet edilebilsinmiş ve oyun salonu mezarlığa dönüşmesinmiş. Öte yandan çok dırdır olmaması için de her üç kişiden en az ikisi de birbirini tanımamalıymış.

Yani evine çağırdığı konkencilerden herhangi üçünden en az ikisi birbirini tanımalı, en az ikisi tanımamalıymış. Böylece gevezelik kıvamında olurmuş ve üç kişinin arasında kapalı kalmazmış.

İşte Ayşe Hanım beni bu yüzden evine çağırmıştı. Böyle bir davet nasıl yapılabilirdi? Kendisi denemiş ama haybeye, başaramamış.

Soyut, yani hiçbir işe yaramayan matematik yapanlar sevincimi tahmin edebilirler. Oysa ben de herkes gibi yaptığım işin insanları mutlu etmesini elbet isterim. İşte o şans ayağıma kadar gelmiş!

– Çok kolay, dedim.

Ayşe Hanım'ın gözleri çanaklı konkende çanağı kazanmışçasına parıldadı.

– Ah! diye ünledi. Bana yardımcı olacağınızı biliyordum Ali Bey. İçime doğmuştu. Vallahi de doğmuştu, billahi de doğmuştu. İçimden bir ses... Yemin ederim...

– İnanıyorum, dedim, içinizden bir ses...

– Evet! İçimden bir ses... Aynen konkendeki gibi, açacağımı önceden hissederim... Peki Ali Bey, nedir çözümünüz?

– Bundan kolay ne var, dedim matematikçi göğsümü gere gere. İki kişi çağırırsınız, böylece oyunda sizinle birlikte üç kişi olur ve çağırdıklarınızın birini kimsenin tanımamasına özellikle dikkat edersiniz.

Kendimden mutlu bir ifadeyle Ayşe Hanım'a baktım. Hani kitaplarda "kısa bir sessizlik oldu" denir ya, işte öyle kısa bir sessizlik oldu. Doğrusu ya, bana uzun geldi bu kısa sessizlik.

– Anlatabiliyor muyum? diye sormak zorunda kaldım.

Ayşe Hanım'ın hiç acıması yoktu:

– Hayır, anlatamıyorsunuz!

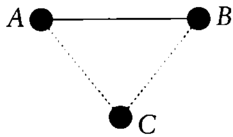
Anlaşılmayacak ne var ki?

– Oyunda üç kişi olsun, dedim. Bu kişilere *A*, *B* ve *C* diyelim. *A* sizsiniz tabii, Ayşe Hanım'ın *A*'sı. *A*'yla *B* birbirini tanısın, ama *C* kimseyi tanımasın... Bunca basit...

Ayşe Hanım'ın gözlerinde beliren parıltı sönmüş, sanki dört kupa ası birden açmışım gibi bana tuhaf tuhaf bakıyordu.

– Kalem kâğıt var mı? diye sordum.

Gitti, bir önceki gecenin konken sonuçlarının yazılı olduğu kâğıdı getirdi. Şöyle bir üçgen çizdim kâğıda:



– Gördüğünüz üç nokta oyuncuları simgelesin, dedim.

– Tamam, dedi. Bu *A* benim değil mi?

– Evet, dedim. *A* sizsiniz. *B*, Bedia Hanım. *C* de Cavidan Hanım...

– Diyelim öyle...

– Evet, diyelim öyle. Birbirini tanıyanlar arasına düz bir çizgi çiziyorum, tanımayanlar arasına da kesik bir çizgi...

– Yani *A*'yla *B* tanışıyorlar, ama *C* kimseyi tanımıyor, öyle mi?

Uzun uzun anlatınca şıp diye anlıyor Ayşe Hanım.

– Aynen, dedim. Gördüğünüz gibi oyunda üç kişi var ve bu üç kişiden en az ikisi birbirini tanıyor (*A* ile *B*), en az ikisi birbirini tanımıyor (*A* ile *C* ya da *B* ile *C*).

– İyi hoş da, dedi Ayşe Hanım, kimsenin tanımadığı birini eve davet etmek pek kolay olmasa gerek!

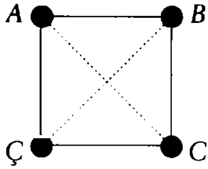
– Teknik sorunlarla ilgilenmem ben, diye yanıtladım. İşin o yanı matematiğin dar sınırlarını aşar.

– Aşkolsun Ali Bey, sokaktan konkenci mi toplayacağız? Hem sonra kimseyi tanımayan oyuncu sıkılmaz mı?

– O zaman, dedim, birbirini tanımayan tanıdığınız iki kişiyi davet edersiniz...

– Üç kişiyle konken oynanmaz ki...

– Peki, dedim, dört kişi oynarsınız. Herkes yanındakini tanır, ama karşısındakini tanımaz. İşte böyle, deyip hızla şu resmi çizdim:



Ayşe Hanım resmi birkaç kez evirip çevirdikten sonra tiksinmiş gibi geri verdi. Sanki köşebaşındaki kıraathanenin hamurlaşmış kâğıtlarını eline almıştı. Ne yalan söyleyeyim, biraz kırıldım. Kırıldığımı belli etmemek için konuşmak zorunda kaldım:

– Yani *A*, *B*'yi tanıyor. *B*, *C*'yi tanıyor. *C*, *Ç*'yi tanıyor. *Ç*, *A*'yı tanıyor. Dolayısıyla bunların aralarına düz bir çizgi çektim. *A* ile *C* tanışmıyorlar. B ile Ç de tanışmıyorlar. Bu yüzden aralarında noktalı bir çizgi var...

Ayşe Hanım'ın yüzü umduğum gibi aydınlanmadı. İnatla açıklamalarımı sürdürdüm:

– Bu dört kişiden herhangi üç kişi seçin. Hangi üç kişiyi seçerseniz seçin, en az ikisi birbirini tanır ve en az ikisi birbirini tanımaz. Örneğin, diye ekledim, örnek üç kişi olarak *A*, *B* ve *C*'yi alalım. *A*, *B*'yi tanır ama *C*'yi tanımaz. Bir başka örnek: *A*, *B* ve *Ç*'yi ele alalım. *A*, *B*'yi tanır ama *B*, *Ç*'yi tanımaz.

Ayşe Hanım hiç hoşnut değildi. Sesimi biraz yükselterek,

– Yani, dedim, seçeceğiniz her üçgende en az bir düz çizgi ve en az bir noktalı çizgi vardır! Bir başka deyişle...

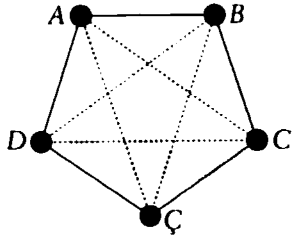
– Anladım, anladım, diye sözümü kesti Ayşe Hanım açıklamalarımdan had safhasında sıkıldığını belli ederek. Matematikçi değilim ama kafam biraz işler.

– Esta...

"Estağfurullah, kimsenin kuşkusu yok," diyecektim ama sözlerimi ağzıma tıkadı.

– Ama Ali Bey, biz pişpirik değil, konken oynayacağız. Dört kişiyle oynanmaz ki bu oyun...

– Peki, buna ne dersiniz? deyip beş kişilik bir oyun çizdim:



– Herkes yanındakini tanısın ve başka kimseyi tanımasın. Bu durumda seçeceğiniz her üç kişiden en az ikisi birbirini tanır ve en az ikisi birbirini tanımaz. Bir başka deyişle, hiçbir üçgen ne tamamıyla düz ne de tamamıyla kesik çizgilerden oluşur. Her üçgende en az bir düz çizgi ve en az bir kesik çizgi vardır.

– Görüyorum, dedi Ayşe Hanım. Peki Ali Bey, siz hiç konken oynadınız mı?

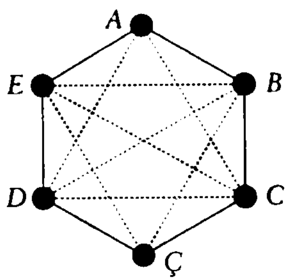
– Az oynadım, ama oynadım.

– Pek sık oynamadığınız belli. Konken en iyi altı kişi arasında oynanır. Yedi de olabilir...

– Öyle mi?

– Evet öyle. Yani en az altı noktalı bir şekil çizmelisiniz. *A*, *B*, *C*, *Ç*, *D* haricinde bir de *E* olmalı.

Aşağıdaki şekli çizip Ayşe Hanım'a verdim.



– Ama, dedi Ayşe Hanım resme şöyle bir baktıktan sonra, burda noktalı çizgilerden oluşan bir üçgen var. *A*, *C* ve *D* birbirlerini tanımıyor. Hatta *BÇE* üçgeni de kesik çizgilerden oluşuyor.

– Haklısınız, dedim, gözümden kaçmış.

Bir iki şekil daha denedim, başaramadım. Çizdiğim her altı noktalı şekilde ya düz çizgilerden oluşan bir üçgen ya da noktalı çizgilerden oluşan bir üçgen bulunuyordu. Ayşe Hanım,

– Ben çok denedim, dedi, olmadı, yapamadım. Ama siz matematikçisiniz. Sizin elinizden her şey gelir, yapamayacağınız yoktur.

– Teşekkür ederim, ama galiba ben de bulamayacağım, dedim.

Doğrusu bu ya, biraz utandım bunları söylerken.

Ayşe Hanım'ın suratı ekşidi.

– Bulamayacak mısınız? Teessüf ederim...

– Öyle bir şekil olsa bulurum da, yok galiba...

Ayşe Hanım köpürdü.

– Nasıl olmaz efendim! Siz matematikçi değil misiniz? Altı noktalı bir şekil çizmekten bile acizsiniz...

Bu kadarı da fazla! Açtım ağzımı yumdum gözümü:

– Efendim, suç benim değil ki! Yoksa yok! Yoksa yaratamam ya! Bu dünyayı ben yaratmadım ki! Ben doğmadan önce de vardı bu dünya! Biz matematikçilerin görevi olmayan bir dünya yaratmak değil, olan dünyayı anlamaya çalışmak!

Ağzımı yumup gözlerimi açtığımda, Ayşe Hanım'ın tam tersini yaptığını gördüm:

– Ucuz felsefenin sırası değil şimdi Ali Bey, diye başladı. Ben matematikçi değilim ve böyle bir şekil bulamadım, diye sürdürdü. Siz matematikçisiniz ve siz de bulamıyorsunuz. Yani ikimizin arasında hiç mi fark yok? diye de bitirdi.

– Var! dedim, ben böyle bir şekil olmadığını kanıtlarım, en azından kanıtlamaya çalışırım...

O zamana değin sessizce bizi izleyen çocukluk arkadaşım, yükselen ses tonumuza dayanamayıp bir iki aksırıp tıksırdı. Ortamı biraz yumuşatmaya çalıştım.

– Ama daha durun, hemen üzülmeyin, dedim. Daha öyle bir şekil olmadığını kanıtlamadık. Hemen yelkenleri suya indirmeyelim. Belki sorunuzun bir yanıtı vardır.

– Kanıtlayacak mısınız, yanıtlayacak mısınız, tanımlayacak mısınız, ne yapacaksanız yapın, ama ben en az altı kişilik masamı isterim!

Ter bastı. İstediğini bulamazsam halim duman!

– Altı kişi ele alalım, deyip kâğıda altı nokta çizdim. Hatta daha fazla da olabilir, önemli değil. Nokta sayısını artırabiliriz. Yeter ki en az altı kişi olsun...

– Olsun bakalım! N'olacaksa olsun artık.

Duymamazlığa geldim.

– Bu noktalardan birine *A* diyelim.

– Bu *A* benim, değil mi?

– Siz ya da bir başkası, önemli değil...

– Ama biraz önce *A* bendim...

– Peki efendim, peki, *A* siz olun. Önemli değil dedim ya! *A* sizsiniz. Sizin dışınızda en az beş kişi var.

– Bu *A* biraz kilolu...

A noktasına estetik yaptım, fıstık gibi oldu!

– Oldu mu şimdi?

– Fena değil.

– Evet, ne diyordum, sizin dışınızda en az beş kişi var.

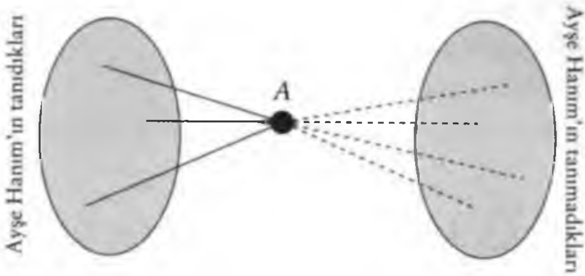
– Evet. Ben olmayan en az beş kişi var!

– Bu siz olmayan kişiler arasından tanıdıklarınız var, tanımadıklarınız var. Doğal olarak...

Dudaklarında alaylı bir gülümsemeyle kocasına göz kırparak,

– Elbette, dedi, ben, ben olmayanları ya tanırım ya tanımam...

– Bu siz olmayan kişileri iki kümeye ayıralım: Tanıdıklarınız ve tanımadıklarınız, deyip bir şekil çizdim.



Ayşe Hanım şekle şöyle bir göz atıp,

– Kaç kişi tanıyorum? diye sordu.

– Kaç kişi tanıdığınızı bilmiyoruz.

– Bilmiyor muyuz?

– Hayır, bilmiyoruz. Ama bildiğimiz bir şey var.

– Neymiş o bildiğimiz şey?

– Ya en az üç kişi tanıyorsunuz ya en az üç kişi tanımıyorsunuz.

– Ben olmayan en az beş kişi olduğundan, öyle olmalı elbet...

– Elbette... Siz olmayan en az beş kişi olduğundan, iki kümeden birinde en az üç kişi olmalı.

Derin bir soluk alıp sürdürdüm:

– Bir an için en az üç kişi tanıdığınızı varsayalım. Yani sol kümede en az üç nokta olduğunu varsayalım...

– Varsayalım bakalım.

– O zaman sizinle bu üç kişi, üç nokta da diyebiliriz, arasında düz çizgiler vardır.

– Evet, tanıdığım için...

– Aynen! Dolayısıyla tanıdığınız bu üç kişiden ikisi birbirini tanıyamaz. Neden derseniz... Eğer tanıdığınız iki kişi birbirini tanısaydı, bu iki kişi arasında da düz çizgi olurdu ve üçünüz düz çizgili bir üçgen oluştururdunuz, ki biz öyle bir üçgen istemiyoruz.

– Demek ki tanıdığım o üç kişiden ikisi birbirini tanıyamaz. Eee?

– Eee'si şu ki, birbirini tanımayan o üç kişi aralarında kesik çizgili bir üçgen oluştururlar...

– Eyvahlar olsun!

– Demek ki üç kişi tanıyamazsınız. En fazla iki kişi tanıyabilirsiniz...

– Öyle zahir.

– Evet öyle. Demek ki tanımadığınız en az üç kişi olmalı. Yani sağ kümede en az üç nokta olmalı...

– Olmalı!

– Ve tanımadığınız bu üç kişi birbirini tanımalı...

– Nedenmiş o?

– Çünkü efendim, tanımadığınız bu üç kişiden ikisi birbirini tanımazsa, o zaman siz ve bu iki kişi kesik çizgili bir üçgen oluşturursunuz, ki biz böyle bir üçgen istemiyoruz.

– Hayır, istemiyoruz.

– Demek ki bu üç kişi birbirini tanımalı.

– Ama o zaman...

– Evet o zaman bu üç kişi düz çizgili bir üçgen oluşturur.

– Hapı yuttuk desenize...

– Evet hapı yuttuk. Oyunda en az altı kişi varsa, ya birbirini tanıyan ya da tanımayan en az üç kişi vardır.

Değerli zamanını çaldığım için özür dileyip ayrıldığımda Ayşe Hanım pek mutlu değildi. Umarım matematikte bulamadığı mutluluğu konkende bulur.

Şapkadan Güvercin Çıkarmak

Dedemin ahşap evinin tam karşısında, kaldırım taşı büyüklüğünde taşlarla örülmüş, uçsuz bucaksız uzanan, yerden göğe yükselen fi tarihinden kalma bir duvar vardı. Öylesine uzun ve yüksek bir duvardı ki, pencereden bakıp duvardan başka bir şey görmek için insanın hayatını tehlikeye atması gerekirdi. Neyin duvarıydı, ardında ne vardı, nedense hiç merak etmedim.

Dedemi her ziyaretimde, o sonsuz duvarın oyuklarında barınan güvercinleri seyrederdim pencereden. Hiçbir anlam yükleyemediğim uğultulu bir guguk sesi yükselirdi güvercinlerden. Kanarya şakıması gibi neşe ve cilve dolu değildi bu guguk sesi. Martı ötüşü gibi cıyak cıyak ve arsız da değildi. Hele karga gaklaması gibi ürkünç hiç değildi. Dinsel çağrışımlar uyandıran, Gregoryen şarkılarını anımsatan gizemli bir uğultuydu güvercinlerinkisi.

Güvercin sayısı oyuk sayısından her zaman daha fazlaydı; öyle ki her oyukta birkaç güvercin birden bulunurdu. Saymasını daha yeni öğrendiğimden olacak, oyukları ve güvercinleri saymaya çalışırdım. Oyuklar sayılmak için uslu uslu beklerlerdi de, güvercinlerle bir türlü başedemezdim. Aklına esen uçar gider, kimi durup dururken yer değiştirir, nerden bilinmez, bir güvercin çıkagelir, ya da iki güvercin barındırdığını sandığım

bir oyuktan bir üçüncü, bir dördüncü, hatta kimileyin bir beşinci güvercin çıkıverirdi.

Güvercin sayısı oyuk sayısından her zaman daha fazlaydı dediğim gibi. Yirmi oyuk varsa, barınmak isteyen otuz güvercin vardı. Zorunlu olarak oyuklardan birinde birden fazla güvercin barınırdı.

Eğer güvercin sayısı oyuk sayısından daha fazlaysa, en az bir oyukta birden fazla güvercinin olması gerektiğinin çok yararlı ve önemli bir matematik ilkesi olduğunu yıllar sonra öğrenecektim. Buna, matematikte, ***güvercin yuvası ilkesi*** denir.

Eğer 10 güvercin yuvası ve en az 11 güvercin varsa, yuvaların birinde en az iki güvercin barınmalıdır.

Eğer 10 güvercin yuvası ve en az 21 güvercin varsa, yuvaların birinde en az üç güvercin barınmalıdır.

Eğer 10 güvercin yuvası ve en az 31 güvercin varsa, yuvaların birinde en az dört güvercin barınmalıdır.

Güvercin yuvası ilkesine göre, 25 kişiye 1'le 24 arasında bir sayı verilecekse, en az iki kişiye aynı sayı düşmeli. Bu akıl yürütme güvercin yuvası ilkesiyle şöyle açıklanabilir: 24 tane yuva olsun ve bu yuvaları 1'den 24'e sayılayalım. 25 kişiyi bu yuvalara sokacağız. 1 sayısı verilenler 1 sayılı yuvaya, 2 sayısı verilenler 2 sayılı yuvaya, 3 sayısı verilenler 3 sayılı yuvaya, ..., 24 sayısı verilenler 24 sayılı yuvaya girecekler. 25 kişi olduğundan ve yalnızca 24 yuva olduğundan, yuvalardan birine en az iki kişi girmeli, yani en az iki kişiye aynı sayı verilmiş olmalı.

Saç Sayısı. Güvercin yuvası ilkesini kullanarak şu anda Türkiye'de en az iki kişinin aynı sayıda saçı olduğunu kanıtlayabiliriz. Hem de kimsenin saçını saymadan! Şöyle kanıtlarız: Türkiye'de şu anda 55 milyondan fazla insan yaşıyor. Oysa bir insanın sahip olabileceği saç sayısı, o insan ne kadar saçlı olursa olsun, 55 milyondan çok daha az. Demek ki her yurttaşın saç sayısı değişik olamaz ve en az iki kişide aynı sayıda saç olmalı.

Bir insanın sahip olabileceği saç sayısının üstsınırını tam olarak bilmiyorum. Sanırım bir milyondan daha azdır. Eğer sandığım gibi bir insanda en fazla bir milyon saç olabiliyorsa, o zaman Türkiye'de en az 56 kişinin aynı sayıda saçı vardır.

Burda, güvercin yerine insan, yuva yerine de saç sayısını koyduk. Bir milyon yuvamız var. Bu yuvaları 0'dan 1 milyona kadar numaralandıralım. 55 milyondan fazla insanı, saç sayılarına göre, bu bir milyon yuvaya sokacağız. Keller, yani sıfır saçı olanlar, 0 sayılı yuvaya girecek. Bir tel saçı olanlar 1 sayılı yuvaya, iki tel saçı olanlar 2 sayılı yuvaya, ... ve 1 milyon tel saçı olanlar 1 milyon sayılı yuvaya... 55 milyondan fazla Türk vatandaşı olduğundan en az 56 kişi aynı yuvaya girmek zorunda, yani en az 56 kişide aynı sayıda saç vardır.

Tanış Sayısı. Güvercin yuvası ilkesini kullanarak bir teorem kanıtlayalım: *Herhangi bir insan topluluğunda, aynı sayıda insan tanıyan (en az) iki kişi vardır.* Yani herhangi bir toplulukta, tanıdıkları insan sayısı birbirine eşit olan en az iki kişi vardır.

Örneğin dört kişilik ailemde, ailemin her ferdi üç kişi tanır. Doğal olanı da budur zaten. Çocuklarımdan biri, ne eşimin ne de benim tanıdığım bir arkadaşını eve getirdiğinde, eşimle ben evdeki beş kişiden üçer kişi tanırız. Eğer eve gelen konuğu çocuklarımdan biri ve eşim tanıyorsa, o zaman eşimle o çocuğum evdeki beş kişiden dörder kişi tanırlar.

Buna benzer deneyler yaparsanız, yaptığınız her deneyde en az iki kişinin aynı sayıda insan tanıdığını göreceksiniz. Toplulukta üç beş kişi değil, milyonlarca kişi olabilir. O zaman da teorem doğrudur, bu milyonlarca kişiden en az ikisi aynı sayıda insan tanıyordur. (Yazının gerisini okumadan teoremi kanıtlayabilir misiniz?)

Teoremi kanıtlamadan önce, teoremde kullandığımız terimleri açıklayalım.

1) "İnsan topluluğu" terimiyle en az iki kişinin bulunduğu toplulukları kastediyoruz.

2) Herhangi iki kişinin birbirini ya tanıdığını ya da tanımadığını varsayıyoruz. "Sizi gözüm bir yerden ısırıyor" gibi kuşkuya yer yok bu teoremde.

3) Eğer *A*, *B*'yi tanıyorsa, *B*'nin de *A*'yı tanıdığını varsayıyorum. Örneğin Cumhurbaşkanımızla aynı topluluktaysanız ve siz Cumhurbaşkanımızla bir tarihte tanışmışsanız, Cumhurbaşkanı da sizi tanımak zorunda, unutmaya hakkı yok. Yani, teoremimizde, "ben sizi tanırım, ama siz beni tanımazsınız" gibi alçakgönüllülüğe de yer vermiyoruz.

4) Son bir noktayı daha aydınlatmam gerekiyor. Bir insanın kendini tanıdığını varsayacak mıyız? İster varsayalım ister varsaymayalım, teoremin doğruluğunu etkilemez bu varsayım. Her insanın tanış sayısı - yaptığımız varsayıma göre - ya 1 artar ya 1 eksilir, ama en az iki tanış sayısı arasındaki eşitlik bozulmaz. Biz, teoremi kanıtlarken, bir insanın kendini tanımadığını varsayacağız. Dolayısıyla, 5 kişilik bir toplulukta, herhangi bir kişinin tanış sayısı 0'la 4 arasında bir sayıdır. Her insanın kendisini tanıdığını varsaysaydık, tanış sayısı 1'le 5 arasında değişecekti.

Şimdi genel kanıta geçelim.

Eğer toplulukta n kişi varsa, her kişinin tanış sayısı 0'la $n-1$ arasında değişir (0'la $n-1$ dahil). 0'la $n-1$ arasında n sayı vardır. Herkese bu n sayıdan birini vereceğiz. n kişi ve n sayı var... Herkese ayrı sayı düşebilirmiş gibi gelebilir ilk bakışta.

İkinci kez bakalım...

Eğer topluluktan biri 0 kişi tanıyorsa (yani kimseyi tanımıyorsa), bir başkası $n - 1$ kişi (yani herkesi) tanıyamaz. Bunun tersi de doğrudur: Eğer topluluktan biri $n - 1$ kişiyi (yani herkesi) tanıyorsa, bir başkası 0 kişi tanıyamaz. Dolayısıyla, topluluktaki kişilerin tanış sayıları ya,

$$1, 2, 3, \ldots, n-1$$

ya da,

$$0, 1, 2, \ldots, n-2$$

arasında değişir. Her iki şıkta da tanış sayısı en fazla $n-1$ değer alır.

Bu n kişiye, $n - 1$ sayıyı dağıtacağız. Herkese değişik sayı düşemez, çünkü insan sayısı n ve dağıtacağımız yalnızca $n - 1$ tane sayı var. Dolayısıyla bu durumda en az iki kişinin tanış sayısı eşit olmak zorunda. Burda güvercin yuvası ilkesini uyguladık.

Bir Sihirbazlık. Yöntemin gücünü daha iyi göstermek için bir başka teorem kanıtlayalım. Buram buram sihirbazlık kokan bir teorem... 1'le 50 arasından herhangi on sayı seçin. Şimdi çok iddialı bir şey söyleyeceğim: Bu on sayı arasından, toplamları birbirine eşit olan iki tane beş sayılık küme bulabilirsiniz.

Örneğin, diyelim,

$$\{2, 5, 24, 26, 27, 30, 33, 34, 42, 50\}$$

sayılarını seçtiniz. Aşağıdaki beş öğeli altkümelere bakalım:

$$\{2, 24, 27, 33, 42\} \text{ ve } \{5, 26, 30, 33, 34\}.$$

Bu iki kümenin sayılarının toplamları birbirine eşittir. İnanmazsanız toplayın.

İsterseniz 1'le 50 arasında başka on sayı seçin. Biraz denerseniz - ne sihirdir ne keramet - seçtiğiniz on sayı arasından, toplamları eşit olan iki tane beş sayılık küme bulabilirsiniz.

Bu savı kanıtlayalım. A, on sayılık kümemiz olsun. A'nın kaç tane beş öğeli altkümesi vardır?

$$\binom{10}{5} = 252$$

tane vardır[1]. Bu sayıyı aklımızda tutalım, birazdan gerekecek.

Öte yandan, her beş öğelik altkümenin sayılarının toplamı en az

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15,$$

en çok

$$46 + 47 + 48 + 49 + 50 = 240.$$

olabilir. Demek ki toplamlar 15'le 240 arasında değişiyor. 15'le 240 arasında

$$240 - 15 + 1 = 226$$

sayı vardır. Bu sayı da önemli olacak, aklımızda tutalım.

Demek ki, 252 tane beş öğelik altkümenin sayılarının toplamı 15'le 240 arasındaki 226 sayıdan biri olmalı. 252, 226'dan daha büyük olduğundan, güvercin yuvası ilkesine göre, bu 252 altkümeden en az ikisi aynı toplamı vermeli. Teoremimiz kanıtlanmıştır.

Bir Başka Sihirbazlık. Bir başka sihirbazlık daha yapalım. n herhangi bir sayı olsun ve rasgele n tane tamsayı seçin. Bu sayıların hepsi birbirinden değişik olmayabilir.

Şu savı ortaya atıyorum. *Bu n sayıdan birkaçının toplamı n'ye bölünür.*

Örneğin $n = 5$ ise ve 2, 4, 9, 9, 17 sayılarını seçmişsek,

$$2 + 9 + 9$$

sayısı 5'e bölünür (ya da $9 + 9 + 17$).

Savı kanıtlayalım. Sayılarımıza,

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

adını verelim. Aşağıdaki $n + 1$ sayıyı ele alalım:

1 Bkz. Matematik ve Oyun adlı kitabımdaki *Saymadan Saymak*" yazısı.

$$\begin{array}{l} 0 \\ a_1 \\ a_1 + a_2 \\ a_1 + a_2 + a_3 \\ \quad\vdots \\ a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \end{array}$$

Bu $n + 1$ sayının herbiri n'ye bölündüğünde, kalan 0'la $n - 1$ arasında bir sayıdır. 0'la $n - 1$ arasındaysa yalnızca n tane sayı vardır. n, $n + 1$'den küçük olduğundan (şansa bak!), güvercin yuvası ilkesine göre, yukardaki $n + 1$ sayıdan ikisi n'ye bölündüğünde kalanları eşittir. Bu iki sayıdan küçüğünü büyüğünden çıkarırsak, elde ettiğimiz sayı n'ye tam olarak bölünür (ve en başta seçtiğimiz n sayıdan birkaçının, üstelik ardışık olanlarının toplamıdır.) Kanıtımız bitmiştir.

Şapkadan güvercin çıkarmak diye işte ben buna derim.

Cemal Amca'nın Zarları

Başkomiserlikten emekli alt kat komşumuz Cemal Amca tavlaya çok düşkündü. Emekli olmazdan önce haftasonlarını bahçede tavla oynayarak geçirirdi. Hafta içindeyse haftasonunu iple çekmeye karakoluna giderdi. Emekli olduğunda, haftanın yedi günü, sabahtan geceyarılarına, hiç durmamacasına tavla oynamaya başladı.

Melek gibi bir karısı vardı Cemal Amca'nın. Şadiye Hanım, daha doğrusu Şadiy'anım... Pilot olan büyük oğlu bir uçak kazasında ölünce, Şadiy'anım evine kapandı, o günden sonra evden dışarı adımını atmadı. Acısı öylesine büyüktü. Bütün gün evinde oturur, terzilik yapıp evin geçimine katkıda bulunurdu.

Önce Şadiy'anım öldü, arkasından Cemal Amca. Toprakları bol olsun. Cemal Amca'nın emrindeki polislere dövdürdüğü bir iki hırsız dışında, kimseye zararları dokunmamıştı.

Cemal Amca, başka kimse bulamadığında tek başına tavla oynardı. Bir gün Cemal Amca'yı yine böyle tek başına bahçede tavla oynarken görmüştüm. Güleceğini sanarak,

– Kim kazanıyor Cemal Amca? diye sormuştum.

Gülmemişti. Başını tavladan kaldırmadan, son derece ciddi,

– Ben! demişti.

Cemal Amca'nın yanıtı aklıma geldikçe hâlâ daha gülerim.

Bir gün, Cemal Amca'nın hep tavla oynamadığını keşfettim. O gün Cemal Amca, elinde fincan, bahçedeki geleneksel yerine kurulmuş zar atıyordu ve gelen zarları kâğıdına not ediyordu. Merakla yanına yaklaşıp,

– Ne oynuyorsun Cemal Amca? diye sordum.

– Zar atmaca oynuyorum, dedi.

Zar attığını görüyordum ama neden zar attığını anlayamıyordum. Bilmediğim bir oyun mu oynuyordu acaba? Sessizliğimden Cemal Amca şaşkınlığımı anladı. Kafasını tavladan kaldırmadan (çünkü Cemal Amca kafasını hiç tavladan kaldırmazdı), yakın gözlüklerinin üstünden aşırttığı bakışlarıyla gözlerimin içine içine bakarak,

– Oğlum, dedi, zar vardır şeşi boldur, zar vardır yeki yoktur. Kimi zarın ceharı kıttır, kiminin penci... Kemiğe söve söve durmadan gele atarsın... Oysa kemik ne yapsın, herbirinin kendine özgü bir kişiliği, bir yaşantısı vardır. Nasıl usta bir udi çaldığı udun huyunu suyunu bilmeliyse, tavlacıyım diyen de tavlasının zarlarını yakından tanımalı...

Bu sözlerin güzel sözler olduğunu kavramıştım ama derinliğine tam girememiştim. Çocukluk işte! Cemal Amca'nın zarlarını denediğini o yaşta nasıl bilebilirdim ki? Kısa bir sessizlikten daha sonra Cemal Amca,

– Zarlarımı deniyorum, diye sürdürdü, bakalım hangi zar daha çok geliyor diye...

– Öyle söylesene Cemal Amca!

Bir iki dakika Cemal Amca'yı izledim sessizce. Her zar atışını kâğıdına not ediyordu. Birden, sıkıldığımı zannettiğinden herhalde,

– Biraz da sen at bakalım, dedi.

Aldım zarı elime, fincanla uğraşamazdım. Zar öylesine aşınmıştı ki, nerdeyse yusyuvarlaktı. Ve sanki yosun tutmuş gibi kaygandı. Altı kez attım. Attığım altı zarın beşi şeş (yani 6) geldi. Cemal Amca,

– Dur bakalım, dedi, biraz fazla şeş atmaya başladın. İstatistiklerimi atüst ettin...

Kalem kâğıdı yeniden eline alıp hesaplamaya başladı. Biraz sonra,

– Ohooo, dedi, şeşlerin ortalamasını yüzde 18,2'den yüzde 21,0'a çıkardın.

Bu sözlerin hemen ardından Şadiy'anım Cemal Amca'yı yemeğe çağırdı. Cemal Amca bir çırpıda kâğıtlarını toplayıp evine girdi. Ama en son kullandığı kâğıt masanın üstünde kalmıştı. Ya unutmuştu ya da benim attığım zarları dikkate almamaya karar verip özellikle bırakmıştı. O kâğıdı katlayıp cebime koydum.

Yıllar sonra, nerdeyse çeyrek yüzyıl sonra, tavan arasında bulduğum tozlanmış, küflenmiş, fare kemirikli bir valizimi karıştırırken o kâğıdı buldum. Üstünde %18,2 ve %21,0 yazıyordu.

Cemal Amca'nın not ettiği %18,2 ve %21,0 sayılarından, Cemal Amca'nın benden önce kaç zar attığını ve bu zarların kaçının şeş olduğunu bulabilecek misiniz?[1]

Cemal Amca'nın ben gelmeden önce attığı zar sayısına x, şeş (yani 6) sayısına da y diyelim. x ve y sayılarını bulmaya çalışacağız. Cemal Amca'nın dediklerini matematikçeye çevirelim. Cemal Amca'nın dediğine göre, ben zar atmadan önce şeşlerin yüzdesi 18,2'ymiş. Demek ki

$$y/x = 0{,}182. \qquad (1)$$

Gene Cemal Amca'nın dediğine göre, ben zar attıktan sonra şeşlerin yüzdesi 21,0'a yükselmiş. Altı zar attığımdan ve bunların beşi şeş geldiğinden, Cemal Amca'nın verdiği bu bilgiden,

$$\frac{y+5}{x+6} = 0{,}210 \qquad (2)$$

eşitliği çıkar.

1 Bu yazı Kaynakça [15]'ten esinlenmiştir.

(1) ve (2) eşitliklerini biliyoruz ve x ve y'yi bulmaya çalışıyoruz.

Oldukça kolay bir problem... Çünkü (1) ve (2) denklemleri, iki bilinmeyenli iki doğrusal (lineer) denklem. Çözmek zor olmasa gerek.

(1) denkleminden

$$y = 0{,}182\,x$$

çıkar. (2)'de y yerine $0{,}182x$ koyarsak, elde ettiğimiz yeni denklemde y kalmaz ve basit bir hesapla x'i buluruz:

$$x = 133{,}5714286...$$

Demek ki Cemal Amca 133,5714286... kez zar atmış! Yani virgüllü bir sayı kez... Olacak iş değil! Bir yerde bir yanlış olmalı.

Acaba Cemal Amca bana yanlış bilgi mi verdi?

Bir bakıma evet, bir bakıma hayır. Belli ki Cemal Amca yüzdeleri verirken sayılarını en yakın ondalığa yuvarlamış. Örneğin, şeşlerin gerçek yüzdesi, ben zar atmadan önce 18,1818... ve ben zar attıktan sonra 21,0144927... olabilirdi. Haklı olarak gereksiz ince hesaplara girmek istemeyen Cemal Amca, bu sayıları 18,2'ye ve 21,0'a yuvarlamış olabilir. Olabilir değil, öyle olmalı!

Demek ki Cemal Amca'nın bize verdiği sayılar aşağı yukarı sayılar. Cemal Amca'nın bize verdiği bilgi aslında şöyle:

ve

$$0{,}1815 \leq \frac{y}{x} \leq 0{,}1825 \qquad (3)$$

Bu eşitsizliklerden x ve y'yi bulmalıyız.

$$0{,}2095 \leq \frac{y+5}{x+6} \leq 0{,}2195 \qquad (4)$$

Hesaplara başlayalım. (3) eşitsizliğindeki sayıların terslerini alırsak,

$$\frac{1}{0,1825} \le \frac{x}{y} \le \frac{1}{0,1815}$$

buluruz. Bundan da,

$$\frac{y}{0,1825} \le x \le \frac{y}{0,1815}$$

yani ,

$$\frac{y}{0,1825} \le x \tag{4.1}$$

ve

$$x \le \frac{y}{0,1815} \tag{4.2}$$

eşitsizlikleri çıkar.

Öte yandan (4)'teki paydaları temizleyip gereken basit aritmetiği yapacak olursak

$$0{,}2095x - 3{,}743 \le y \le 0{,}2105x - 3{,}737$$

eşitsizliklerini buluruz. Soldaki x yerine (4.1)'i, sağdaki x yerine (4.2)'yi koyalım:

$$\frac{0,2095}{0,1825}y - 3,743 \le y \le \frac{0,2195}{0,1815}y - 3,737 \tag{5}$$

eşitsizliklerini, yani

$$\frac{0,2095}{0,1825}y - 3,743 \le y \text{ ve } y \le \frac{0,2195}{0,1815}y - 3,737$$

eşitsizliklerini elde ederiz. Bunlar da sırasıyla

$$23{,}38 \le y \text{ ve } y \le 25{,}30$$

eşitsizliklerini verir. Demek ki, y, 23,38'le 25,30 arasında bir tamsayı. Dolayısıyla y ya 24'tür ya 25.

Önce y'nin 24 olduğunu varsayalım. Eğer (5)'te $y = 24$ alırsak,

$$131{,}5 \le x \le 132{,}23$$

buluruz, ki x bir tamsayı olduğundan, x'in 132 olduğu anlaşılır. Demek ki $y = 24$ olduğunda $x = 132$ olmalı.

Şimdi de y'nin 25 olduğunu varsayalım. Eğer (5)'te $y = 25$ alırsak,

$$136{,}98 \leq x \leq 137{,}74$$

buluruz. Ama x bir tamsayı, dolayısıyla $x = 137$ olmalı.

Bulduğumuz sonuçların verilerle ne derece uyuştuğuna bakalım:

x	y	y/x	$(y + 5)/(x + 6)$
132	24	0,1818181...	0,210144927...
137	25	0,1824817...	0,209790209...

Bu sayıları en yakın bindeliğe yuvarlayacak olursak, 0,182 ve 0,210 buluruz ki, bu sayılar da Cemal Amca'nın bize verdiği sayılardı.

Tek yanıtlı sorulara alışmış olanları üzmemişimdir umarım.

Şükür Halimize...

Sumatralı bir matematik öğretmeni, öğrencilerinin derslerini anlamamalarından şikayetçi olmaları üzerine, ikisini döve döve bayılttı, on üçünü yaraladı.

The London Times (Avustralya), 23 Mart 1981

Doğru Önermeler, Yanlış Önermeler

Bu yazıda 6 mantık sorusu sorup yanıtlayacağız.

Birinci Bilmece. Yargıç karar verecek. Mahkeme tutanaklarından şu bilgiler çıkıyor:

Eğer *A* suçsuzsa, hem *B* hem *C* suçlu.

Ya *B* ya *C* suçsuz[1].

Ya *A* suçsuz ya *B* suçlu.

Kim ya da kimler suçlu, kim ya da kimler suçsuz?

İkinci Bilmece. Ayşe, Emin ve İhsan ayrı ayrı takımları tutuyorlar.

Eğer İhsan Beşiktaşlıysa, Emin Fenerbahçeli[2].

Eğer İhsan Fenerbahçeliyse, Emin Galatasaraylı.

Eğer Emin Beşiktaşlı değilse, Ayşe Fenerbahçeli.

Eğer Ayşe Galatasaraylıysa, İhsan Fenerbahçeli.

Ayşe'nin, Emin'in ve İhsan'ın tuttukları takımları bulun.

---

1 Bu önermeye göre hem *B* hem *C* suçsuz olabilir. Bundan sonraki önerme için de aynı şey geçerli.

2 Eğer İhsan Beşiktaşlı değilse, bu önerme bize bir şey öğretmiyor. Aynı şey bundan sonraki önermeler için de geçerli.

Üçüncü Bilmece. Aşağıdaki tümceleri Ateş'ten, Bülent'ten ve Can'dan duydum. Ben onların yalancısıyım.

Ateş, "ya Bülent ya Can yalancıdır," dedi.

Bülent, "Ateş yalancıdır," dedi.

Can, "hem Ateş hem Bülent yalancıdır," dedi.

Kim ya da kimler yalancı?

Not: Yalancı hep yalan söyler! Yalancı olmayan da hep doğru söyler.

Dördüncü Bilmece. Altı çocuktan ikisi bir bahçeden elma aşırmış. Ama hangi ikisi? Çocuklar büyük bir günah işlemişler gibi sorguya çekilirler.

Hamdi çocuk, "Can'la Göksun çaldı," der.
Jale çocuk, "Dilek'le Tamer çaldı," der.
Dilek çocuk, "Tamer'le Can çaldı," der.
Göksun çocuk, "Hamdi'yle Can çaldı," der.
Can çocuk, "Dilek'le Jale çaldı," der.

Tamer çocuk bulunamamış. (Yoksa bir köşede elmaları mı yiyor?) Sorgulanan beş çocuktan dördü yaramazlardan birinin adını doğru vermiş, öbürünün adını yanlış vermiş. Beşinci çocuk her iki adı da yanlış vermiş. Elma aşıran iki yaramazı bulun.

Beşinci Bilmece. A, B, C diye adlandırılan üç nesnenin renkleri mavi, kırmızı ve yeşil. Aşağıdaki üç önermeden salt biri doğru:

A kırmızı
B kırmızı değil
C mavi değil

Nesneler ayrı renklerde olduklarına göre, her nesnenin rengini bulun.

Altıncı Bilmece. Ayşe, Bülent, Cevdet ve Derya aralarında satranç turnuvası yaparlar. Turnuva bittikten sonra,

Ayşe, "Cevdet kazandı, Bülent ikinci geldi," der;
Bülent, "Cevdet ikinci, Derya üçuncü geldi," der;
Cevdet, "Derya sonuncuydu, Ayşe ikinciydi," der.

Her üç kişinin öne sürdüğü iki önermeden **yalnızca** biri doğrudur. Örneğin Ayşe'nin öne sürdüğü

Cevdet kazandı

ve

Bülent ikinci geldi

önermelerinden yalnızca biri doğrudur, ikisi birden doğru olamaz. Dolayısıyla Ayşe'nin yanıtından, ya Cevdet'in birinci olduğunu ya da Bülent'in ikinci geldiğini biliyoruz. Bundan başka, ya Cevdet'in birinci gelmediğini ya da Bülent'in ikinci gelmediğini biliyoruz.

Turnuva sonucunda eşitlik olmadığına göre, turnuvanın sıralaması nasıldır?

Birinci Bilmecenin Yanıtı: Eğer *A* suçsuzsa, birinci önermeye göre hem *B* hem *C* suçludur. Ama bu sonuç ikinci önermeyle çelişiyor. Demek ki *A* suçlu. *A* suçlu olduğundan, üçüncü önermeye göre *B* suçlu. *B* suçlu olduğundan, ikinci önermeye göre *C* suçsuz.

Sonuç olarak, *A* ve *B* suçlu, *C* suçsuzdur.

İkinci Bilmecenin Yanıtı: Önce mantıkta kullanılan "ise" sözcüğü üzerine bir iki söz söyleyelim.

Türkçede ve başka dillerde, *Pazar günü hava güzel olursa pikniğe gideceğiz* tümcesi, pazar günü hava güzel değilse pikniğe gidilmeyecek anlamını da taşır. Her ne denli tümce bunu açık açık söylemiyorsa da, bu anlam sezilir. Mantık ve matematikteyse, pazar günü hava güzel olmazsa pikniğe gidilip gidilmeyeceği bu tümceden anlaşılmaz. Konumuz matematik ve mantık olduğundan, örneğin, İhsan Beşiktaşlı değilse, ikinci tümce bize hiçbir bilgi vermez.

Şimdi bilmecemize dönelim.

Önce önermelerimizi simgelerle belirtelim. EB, "Emin Beşiktaşlı" önermesini simgelesin. AG, "Ayşe Galatasaraylı" önermesini simgelesin vs. Bildiklerimizi sıralayalım:

$$
\begin{array}{lll}
\dot{I}B & \text{ise} & EF \\
\dot{I}F & \text{ise} & EG \\
EB & \text{değilse} & AF \\
AG & \text{ise} & \dot{I}F
\end{array}
$$

Birinci önermeyi, yani "$\dot{I}B$ ise EF" önermesini ele alalım. Bu önerme, bize IB doğruysa, EF'nin de doğru olduğunu söylüyor. Ama, $\dot{I}B$ yanlışsa yeni bir bilgi vermiyor. Bunun gibi üçuncü önerme, EB yanlışsa AF'nin doğru olduğunu söylüyor; EB doğruysa üçuncü önerme bize yeni bir bilgi vermiyor.

Eğer $\dot{I}B$ doğruysa, $\dot{I}B = 1$ yazalım; yanlışsa $\dot{I}B = 0$ yazalım. Bunu her önerme için yapalım. Elde ettiğimiz yeni önermeleri yazalım:

$$
\begin{array}{lll}
\dot{I}B = 1 & \text{ise} & EF = 1 \\
\dot{I}F = 1 & \text{ise} & EG = 1 \\
EB = 0 & \text{ise} & AF = 1 \\
AG = 1 & \text{ise} & EF = 1
\end{array}
$$

Başka ne biliyoruz? Herbirinin ayrı ayrı takımları tuttuğunu biliyoruz. Demek ki, örneğin Emin Fenerbahçeliyse, Ayşe ve İhsan Fenerbahçeli olamazlar; yani $EF = 1$ ise $AF = \dot{I}F = 0$ olmalı. Bunun tersi de doğrudur: $AF = \dot{I}F = 0$ ise, $EF = 1$'dir (biri Fenerbahçeli olmalı!) Ayrıca, bir kişi iki takımı birden tutamayacağından, örneğin $EF = 1$ ise $EB = EG = 0$ olmalı. Bunun da tersi doğrudur: $EB = EG = 0$ ise, $EF = 1$ olmalı (Emin bir takımı tutmalı!)

	B	*F*	*G*
A			
E			
İ			

Sonuçlarımızı yandaki tabloda göstereceğiz. Tablonun boş karelerine 0 (yanlış) ve 1 (doğru) koyacağız. Her sütunda ve her sırada yalnızca bir tane 1 olması gerektiğini biliyoruz.

Eğer $EF = 1$ ise, $EB = 0$'dır (Emin Fenerliyse Beşiktaşlı olamaz). $EB = 0$ eşitliğinden ve üçuncü önermeden AF = 1 çıkar. Ama hem EF hem AF doğru olamaz. Demek ki $EF = 0$ olmalı.

Eğer $İB = 1$ ise, birinci önermeden $EF = 1$ eşitliği çıkar, ki bunun doğru olmadığını yukarda görmüştük. Demek ki $İB = 0$.

Eğer $AG = 1$ ise, dördüncü önermeden, $EF = 1$ çıkar, ki bunun doğru olmadığını görmüştük. Demek ki $AG = 0$.

	B	F	G
A			0
E		0	
İ	0		

Bu bulduğumuz üç sonucu tablomuzda yandaki gibi gösterelim.

$İF = 1$ eşitliğini varsayalım. İkinci önermeye göre, $EG = 1$'dir. $EG = 1$ olduğundan, $EB = 0$ olmalı. $EB = 0$ olduğundan, üçuncü önermeye göre, $AF = 1$ olmalı. Ama hem AF hem $İF$ doğru olamaz. Demek ki $İF = 0$.

Sonuç olarak, $İB = EF = AG = İF = 0$ eşitliklerini kanıtladık. Şimdi, yukardaki tabloyu - her sütuna ve sıraya bir **1** gelecek biçimde - bir türlü tamamlayabiliriz: $İB = İF = 0$ eşitliğini biliyoruz. Demek ki $İG =$ **1** olmalı (İhsan bir takım tutmak zorunda!) $EF = İF = 0$ olduğuna göre, $AF = 1$ olmalı (biri Fenerbahçeyi tutmalı!) $AF = 1$ olduğundan, $AB = 0$ olmalı. $AB = İB = 0$ olduğundan, $EB = 1$ olmalı (biri Beşiktaşlı olmalı!)

	B	F	G
A	0	1	0
E	1	0	0
İ	0	0	1

Sonuç olarak,

Ayşe Fenerbahçeli
Emin Beşiktaşlı
İhsan Galatasaraylı.

Üçüncü Bilmecenin Yanıtı: Ateş, Bülent ve Can yerine A, B ve C simgelerini kullanacağız. "A yalancı" önermesini $A = 0$ olarak, "A yalancı değil" önermesini de $A = 1$ olarak gösterelim. Aynı şeyi B ve C için de yapalım. Şimdi A, B ve C'nin dediklerini matematikçeye çevirelim.

Önce A'mn dediğini ele alalım. A, "ya B ya C yalancıdır," diyor. Yani "ya $B = 0$ ya $C = 0$'dır," diyor.

Demek ki, A yalancı değilse (yani $A = 1$ ise), "ya $B = 0$ ya $C = 0$" önermesi doğrudur. Demek ki, "$A = 1$ ise ya $B = 0$ ya $C = 0$" önermesi doğrudur.

Öte yandan, $A = 0$ ise, yani A yalancıysa, "ya $B = 0$ ya $C = 0$" önermesi doğru olamaz (çünkü A yalan söylüyordur); dolayısıyla $B = C = 1$ eşitlikleri doğrudur. Sonuç olarak, A'nın dediklerinden,

$$A = 1 \text{ ise, ya } B = 0 \text{ ya } C = 0$$

ve

$$A = 0 \text{ ise, } B = C = 1$$

önermeleri çıkar.

Aynı şeyi B ve C için yapacak olursak, bilmecemiz biraz daha matematikselleşir. İşte bilmecenin bize verdiği bilgilerin matematikçesi:

1. $A = 1$ ise ya $B = 0$ ya $C = 0$
2. $B = 1$ ise $A = 0$
3. $C = 1$ ise $A = B = 0$
4. $A = 0$ ise $B = C = 1$
5. $B = 0$ ise $A = 1$
6. $C = 0$ ise ya $A = 1$ ya $B = 1$

$A = 0$ eşitliğini varsayalım. (4)'e göre $B = C = 1$ olmalı. $C = 1$ olduğundan, (3)'e göre $B = 0$ olmalı. B, hem 0'a hem 1'e eşit olamayacağından bir çelişki elde ederiz. Demek ki $A = 1$ olmalı.

$A = 1$ olduğundan, (2)'den B'nin 1 olamayacağı çıkar. Demek ki $B = 0$.

$A = 1$ olduğundan, (3)'ten C'nin 1 olamayacağı çıkar. Demek ki $C = 0$.

Sonuç olarak B ve C yalancıdır, A yalancı değildir. Doğru yanıtı bulduğumuzdan (yani bilmecenin bir çözümün olduğundan) emin olmak için, bulduklarımızın (1), (5) ve (6)'yı sağladığını kontrol etmemiz gerekir. Bunu okura bırakıyoruz.

Dikkat edilirse (1), (5) ve (6)'yı kullanmadık.

Dördüncü Bilmecenin Yanıtı: Çocukların adlarını baş harflerine göre C, D, G, H, J, T harfleriyle simgeleyelim. Elmayı C aşırmışsa $C = 1$ yazalım, yoksa $C = 0$ yazalım. Bunu her çocuk için yapalım. Çocuklardan ikisi elma aşırdığından,

$$C + D + G + H + J + T = 2 \qquad (*)$$

eşitliğinin doğru olduğunu biliyoruz.

Başka ne biliyoruz? Çocuklardan dördünün çalanlardan birinin adını doğru, öbürünün adını yanlış verdiğini ve beşinci çocuğun her iki adı da yanlış verdiğini biliyoruz. Demek ki, ihbar edilen adların değerlerinin toplamı 4 olmalı, yani

$$(C + G) + (D + T) + (T + C) + (H + C) + (D + J) = 4$$

olmalı. Bu eşitlikten,

$$3C + 2T + 2D + G + H + J = 4 \qquad (**)$$

eşitliği çıkar. (*) eşitliğini, (**)'dan çıkarırsak,

$$2C + T + D = 2 \qquad (***)$$

eşitliğini buluruz. C, T ve D'nin değeri 0 ve 1 olduğundan, (***) eşitliği iki şıkkın olabileceğini gösterir: Ya $C = 0$ ve $T = D = 1$ eşitlikleri doğrudur, ya da $C = 1$ ve $T = D = 0$ eşitlikleri.

Birinci şık, Jale'nin dediğinden olanaksızdır. Demek ki ikinci şıktayız: $C = 1$ ve $T = D = 0$. Hamdi ve Göksun'un dediklerinden ve $C = 1$ eşitliğinden $G = 0$ ve $H = 0$ eşitlikleri çıkar. Geriye Jale kalır. Demek ki elmaları Jale ve Can aşırmış.

Beşinci Bilmecenin Yanıtı: A kırmızıysa, ikinci önerme yanlış olmalı, yani B de kırmızı olmalı. Demek ki A kırmızı olamaz. Dolayısıyla birinci önerme yanlıştır.

B kırmızı değilse - A kırmızı olmadığından - C kırmızı olmalı. Ama o zaman da ikinci ve üçüncü önermeler doğru olur. Oysa önermelerden yalnızca birinin doğru olduğunu biliyoruz. Demek ki B kırmızı olmalı. Dolayısıyla ikinci önerme de yanlıştır.

İlk iki önerme yanlış olduğundan üçuncü önerme doğrudur. Yani C mavi değildir. Bu bilgilerden kolaylıkla A'nın mavi, B'nin kırmızı ve C'nin yeşil olduğu çıkar.

Altıncı Bilmecenin Yanıtı: Ayşe'nin dediklerini ele alalım. a_1, "Cevdet kazandı" önermesinin doğruluk değeri olsun. Yani, Cevdet turnuvayı gerçekten kazanmışsa, $a_1 = 1$ olsun. Yoksa $a_1 = 0$ olsun. a_2, "Bülent ikinci geldi" önermesinin doğruluk değeri olsun. Ayşe'nin dediklerinden yalnızca biri doğru olduğundan, ya $a_1 = 1$ ya da $a_2 = 1$'dir. Ama ikisi birden bir olamaz. Yani,

$$a_1 + a_2 - 2a_1a_2 = 1 \tag{1}$$

eşitliği geçerlidir. (Bu eşitlik, ancak ve ancak a_1 ve a_2 sayılarından biri 1 olduğunda doğrudur. Eğer her iki sayı birden 1 ya da biri 0'sa yanlıştır.)

Aynı biçimde, b_1, b_2, c_1, c_2, sırasıyla Bülent ve Cevdet'in öne sürdükleri önermelerin doğruluk değerlerini simgelesinler. Yukardaki gibi akıl yürüterek,

$$b_1 + b_2 - 2b_1b_2 = 1 \tag{2}$$

ve

$$c_1 + c_2 - 2c_1c_2 = 1 \tag{3}$$

eşitliklerini buluruz.

Daha başka ne biliyoruz? Cevdet hem birinci hem ikinci olamayacağından, ya $a_1 = 0$ ya da $b_1 = 0$ olmalı (ikisi birden de 0 olabilir.) Demek ki,

$$a_1b_1 = 0. \tag{4}$$

Buna benzer bir nedenden,

$$b_2c_1 = 0 \tag{5}$$

eşitliği geçerlidir.

Daha bitmedi. Hem Bülent hem Cevdet ikinci olamayacaklarından,

$$a_2b_1 = 0 \tag{6}$$

eşitliğini biliyoruz. Buna benzer nedenlerden,

$$a_2c_2 = 0 \tag{7}$$

ve

$$b_1c_2 = 0 \tag{8}$$

eşitliklerini de biliyoruz.

Bu sekiz eşitlikten a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 sayılarını bulacağız.

(4) eşitliğini ele alalım. Bu eşitliğe göre ya $a_1 = 0$ ya da $b_1 = 0$ olmalı.

Önce b_1'in 0 olmadığını varsayalım. Demek ki $b_1 = 1$. (4) ve (6)'ya göre $a_1 = a_2 = 0$. Ama bu (1)'le çelişiyor. Demek ki $b_1 = 0$ olmalı.

$b_1 = 0$ eşitliğini bulduk. Bu eşitlikten ve (2)'den $b_2 = 1$ çıkar. Bu son eşitlikten ve (5)'ten $c_1 = 0$ çıkar. Bu son eşitlikten ve (3)'ten $c_2 = 1$ çıkar. Bu son eşitlikten ve (7)'den $a_2 = 0$ çıkar. Bu son eşitlikten ve (1)'den $a_1 = 1$ eşitliğini buluruz. Demek ki $a_1 = b_2 = c_2 = 1$. Dolayısıyla, turnuvanın sıralaması şöyle:

1. Cevdet
2. Ayşe
3. Derya
4. Bülent

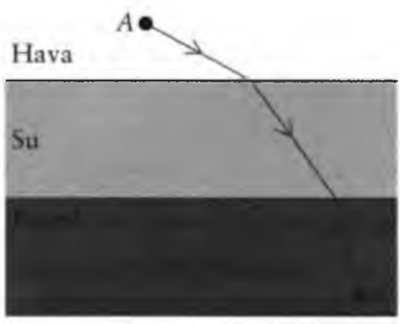
Sonucu bulmak için (8) eşitliğini kullanmadığımıza dikkatinizi çekerim.

Gizli Duvarlar

En az enerji harcama yasası doğanın en bilinen yasalarından biridir.

Örneğin, *A* noktasından yayılan ışık *B* noktasına gitmek için sonsuz sayıda yol arasından en az enerji harcayarak gideceği yolu seçer, ki bu da çoğu zaman en hızlı gideceği yoldur.

Eğer *A* ve *B* noktaları havadaysa, ışık *AB* doğrusunu izler, çünkü *AB* doğrusu ışığın hedefine en çabuk varacağı, en az enerji harcayacağı yoldur.



Eğer *A* noktası havada, *B* noktası sudaysa, ışık *A*'dan *B*'ye gitmek için kırılır, çünkü ışık havada daha hızlı gider, suda yavaşlar, dolayısıyla ışık olabildiğince havada kalmak ister.

Doğanın bu en az enerji harcama yasasına fizikte sık sık raslanır.

Estetik bilincimiz doğadan ve doğa yasalarından kaynaklanır (başka nerden kaynaklansın ki!) En az enerji harcama yasası estetikte de geçerlidir. Güzelliği çoğu zaman yalında buluruz.

Edebiyatta olsun, resimde olsun, mimaride olsun, matematikte olsun, nerde olursa olsun, gereksiz karmaşa hoş değildir, yorar. Yalın, duyularımıza daha hoş gelir ve daha etkilidir. Yazında örneğin, eğer bir tümce bir düşünceyi, bir duyguyu, bir olayı, bir durumu anlatmaya yetiyorsa, ikincisine gerek yoksa, o gereksiz ikinci tümce orada olmamalı. Gereksiz uzun tümcelerden kaçınılmalı. Bir tek sözcük, yerinde kullanılmışsa ve iyi seçilmişse, koca bir sayfanın işlevini görebilir.

Resimde de öyle. Gereksiz çizgiden, gereksiz renkten kaçınmalı. Sanatçıdan düşüncesini, görüşünü, duygusunu en az enerjiyle anlatabilmeli.

Yalına ve güzelliğe ulaşmak hiç de kolay değildir. Kolay olsaydı, herkes sanatçı olabilirdi. Picasso'nun bir dizi boğa taşbaskısı vardır. Ardarda, birkaç gün içinde yapılmıştır. İlk taşbaskıda bütün ayrıntılarıyla oldukça gerçekçi bir boğa görürüz. İkinci taşbaskıda daha az ayrıntı vardır. Son taşbaskıda üç beş çizgi kalmıştır salt. Bu son taşbaskı öylesine yalındır ki, Evren Paşa gibi, "bunu ben de yaparım," dedirtir insana.

Aslında ben Evren Paşa'yı çok iyi anlıyorum, hatta hak veriyorum ve çocuksu bir saflıkla söylediği bu sözlerde başka hiçbir söylevinde göremediğim bir gerçek görüyorum. Tek kusuru, bu sözleri 60 küsur yaşlarında söylemesidir.

Beğendiğimiz modern sanat müzelerinden, "bunları ben de yapabilirim" duygusuyla çıkmaz mıyız? Bilimsel bir kitabı iyi anlamışsak, yazarın düşüncesini iyi kavramışsak ve yazara hak veriyorsak, o buluşları - isteseydik, zamanımız olsaydı ve doğ-

ru çağda yaşasaydık - biz de bulabilirmişiz gibi bir duyguya kapılmaz mıyız?

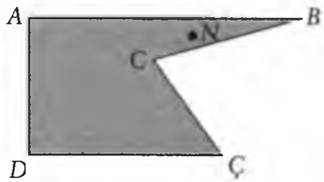
Matematikçi bir arkadaşım, bir gün, tüm ciddiyetiyle,

– Geçen yüzyıl yaşasaydım, amma teorem kanıtlardım ha! demişti.

Freud'un, Darwin'in, Marx'ın buluşları bugünün insanına yalın gelir, "bunları ben de bulabilirdim" dedirtir. Doğrudur. Gerçek yalındır. Ama o yalın gerçeğe ilk ulaşmak öylesine zordur ki...

Picasso yılların deneyimiyle ve kuşku götürmez dehasıyla bir iki gün içinde yalına ulaşabilir. Biz ölümlülerse, yalına ulaşmak için çok çalışmalıyız. "En az enerjiye" ulaşmak için çok enerji harcamalıyız. Aşağıda buna güzel bir örnek bulacaksınız.

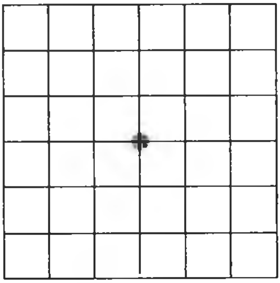
Aşağıdaki şekle bir gözatın. Bu *ABCÇD* beşgenini bir oda olarak düşünün. Beş kenarlı tuhaf bir oda... Bu odanın bir özeliği var. Odanın içindeki *N* noktasından bakıldığı zaman, *CÇ* ve *ÇD* duvarları görünmüyor, ayrıca *AD* duvarının bir bölümü saklı, yalnızca bir bölümü görünüyor. Öte yandan *AB* ve *BC* duvarları tümüyle görünüyor.



Birinci Soru. Öyle bir çokgen oda çizin ki ve bu odanın öyle bir noktası olsun ki, bu noktadan bakıldığında, odanın hiçbir duvarı tamamıyla görünmesin. (Kimi duvarlar hiç görünmeyebilir.)

İkinci Soru. Eğer bulduğunuz çokgen odanın altıdan fazla duvarı varsa, size bir sorum daha var. Öyle bir altıgen oda çizin ki ve bu altıgen odanın içinde öyle bir nokta olsun ki, bu noktadan bakıldığında altı duvarın hiçbiri tamamıyla görünmesin.

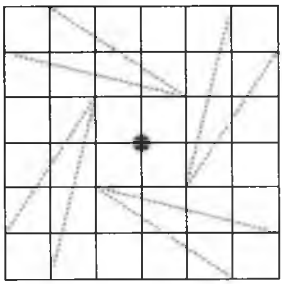
Birinci Sorunun Yanıtı: Herkesin ayrı bir yanıtı olabilir. Ben bulduğum ilk köşegeni göstereyim. Önce, her kenarı 6 bi-



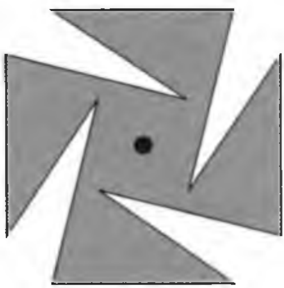
rim uzunluğunda bir kare çizelim.

Oradan bakıldığında, hiçbir duvarın tam olarak görülemeyeceği nokta karenin tam merkezi olacak. Odanın duvarları henüz belli değil. Yukardaki kareyi biraz yontmamız gerekecek.

İnşaata girişiyoruz. Önce aşağıdaki çizgileri çizelim:

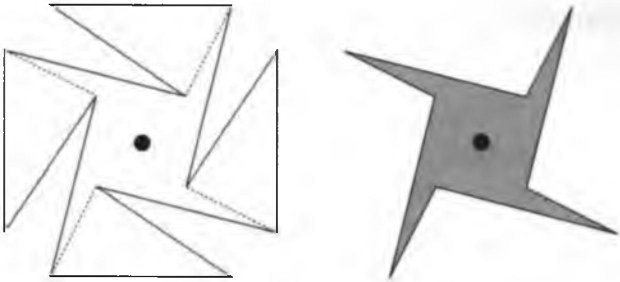


Şimdi, bu son çizdiğimiz çizgilerden kareyi keselim. Aşağıdaki şekli elde ederiz:



İşte odamız. Oniki duvarlı. İşe başladığımız karenin merkezinden bakıldığında hiçbir duvar tam olarak görünmez.

Yukardaki odanın duvar sayısını azaltabilir miyiz? Evet. Yukardaki odanın 8 duvarını yıkıp yerine 4 yeni duvar öreceğiz, böylece duvar sayımız 4 azalacak. Önce aşağıdaki soldaki şekildeki çizgileri çekelim ve sonra bu çizdiğimiz çizgilerden odamızı keselim. İşte yeni odamız:

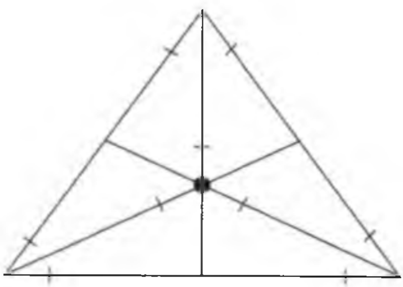


Merkezden bakarsak yine hiçbir duvarı tam olarak göremeyiz. Bu kez odamızın sekiz duvarı var.

Sıra ikinci soruya geldi.

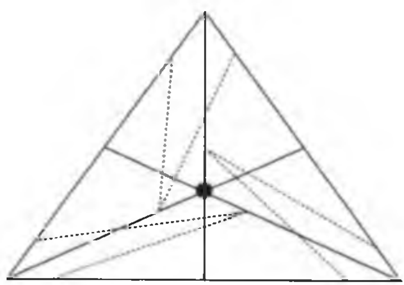
İkinci Sorunun Yanıtı: Yukarda kareyle yaptığımızı bir üçgenle yapacağız ve sekiz duvarlı bir oda yerine altı duvarlı bir oda elde edeceğiz.

İlk önce, açıortaylarıyla birlikte bir eşkenar üçgen çizelim ve bu üçgenin üstünde aşağıdaki gibi 9 nokta belirleyelim.

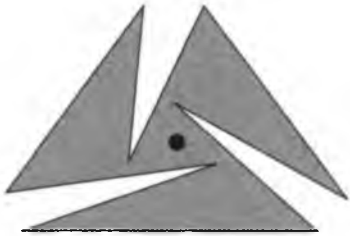


Odamızın merkezi üçgenin merkezi olacak. Odanın duvarlarını henüz belirlemedik. Bu üçgeni biraz yontacağız.

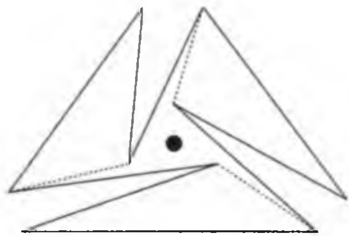
İkinci olarak, bu noktalardan birkaçını yandaki şekildeki gibi doğrularla birleştirelim.



Bu son çizdiğimiz doğrulardan üçgenimizi keselim.



Bu odanın merkezinden bakıldığı zaman hiçbir duvar tam olarak görülmez. Ama odanın dokuz duvarı var. Duvar sayısını azaltabilir miyiz? Evet. 6 duvarı silip yerine 3 duvar çıkabiliriz. Önce odaya aşağıdaki çizgileri çekelim:



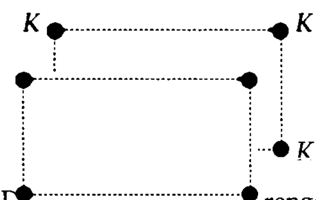
Şimdi de gereksiz üç üçgeni atalım.

İşte odamız. Altı duvarlı ve merkezden bakıldığında hiçbir duvar tam olarak görünmüyor.

Renkli Noktalar

Her noktası ya maviye ya kırmızıya boyanmış bir düzlem önündeyiz. Bazı noktaları maviye, bazı noktaları kırmızıya boyanmış bir düzlem... Düzlemin sonsuz tane noktasını kim boyamışsa boyamış, biri boyamış ve önümüze getirmiş.

Düzlem nasıl boyanmış olursa olsun, bu düzlemde dört köşesi de aynı renk olan yatay ya da dikey bir dikdörtgen var mıdır? Yani bu düzlemde ya dört köşesi birden mavi ya da dört köşesi birden kırmızı olan bir dikdörtgen bulabilir miyiz?



Dört köşesi de kırmızı renge boyanmış bir dikdörtgen

Yanıt: Evet[1]!

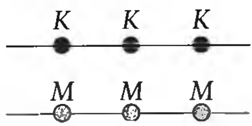
Yanıtı verdik, şimdi yanıtın doğru olduğunu kanıtlayalım:

Yatay bir doğru üzerinde bulunan 7 nokta ele alalım. Noktalar iki renge boyanmış olduğundan, bu 7 noktanın en az dör-

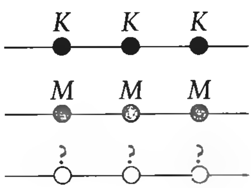
1 Hatta bir tane değil, sonsuz tane öyle dikdörtgen bulabiliriz. Dahası, renk sayımız iki değil de sonlu herhangi bir sayı olsaydı da sonsuz tane öyle dikdörtgen bulabilirdik. Bu dediğimin doğruluğu yazıdan çıkacak.

dü aynı renkte olmalıdır, diyelim kırmızı. Demek ki aynı yatay doğru üzerinde bulunan dört kırmızı noktamız var. İşte o dört kırmızı nokta:

Bu doğrunun altında ikinci bir yatay doğru ele alalım. Bu ikinci yatayın üstünde bulunan ve yukarda bulduğumuz dört kırmızı noktanın hemen altında yeralan dört noktaya bakalım. Eğer bu noktaların ikisi kırmızıysa, kırmızı köşeli bir dikdörtgen elde ederiz. Demek ki bu noktaların en az üçünün mavi olduğunu varsayabiliriz. İşte noktalarımız ve renkleri:



Şimdi yukardaki doğruların altında üçüncü bir yatay doğru ele alalım. Yeni doğrumuzun üstünde bulunan yukardaki noktaların hemen altındaki noktalara bakalım.

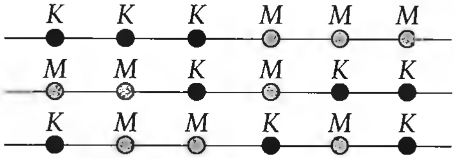


Bu üç noktanın ya ikisi kırmızı ya da ikisi mavi olmak zorunda. Birinci şıkta kırmızı köşeli bir dikdörtgen buluruz, ikinci şıkta mavi köşeli bir dikdörtgen.

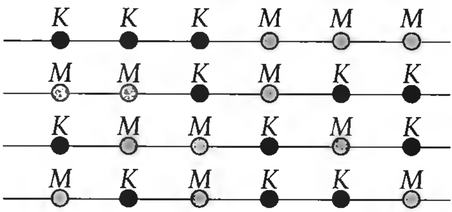
Görüldüğü gibi aynı renk köşeli bir dikdörtgen bulmak için sonsuz noktalı bir düzleme gereksinmiyoruz. Eğer üç paralel doğru üzerinde üstüste yedişer nokta iki renge boyanmışsa, her dört köşesi de aynı renkte olan bir dikdörtgen bulabiliriz. Yani 7×3 noktalı bir düzlemin her noktası ya maviye ya kırmızıya boyanmışsa, bu düzlemde iki kenarı yatay olan ve dört köşesi de aynı renge boyanmış bir dikdörtgen bulabiliriz.

Bundan böyle sonlu sayıda noktası olan düzlemleri ve iki kenarı yatay olan dikdörtgenleri ele alacağız. Eğer $n \times m$ noktalı bir düzlemi, içinde dört köşesi de aynı renk olan yatay bir dikdörtgen bulunmayacak biçimde boyayabiliyorsak, bu düzleme **2-boyanabilir düzlem** diyeceğiz. Yukarda da gördüğümüz gibi 7×3'lük düzlem 2-boyanamaz.

Öte yandan 6×3 noktalı düzlem 2-boyanabilir:



Yukardaki düzlemi 2-boyanabilir biçimde büyültebilir miyiz? Bir sütun daha ekleyemeyeceğimizi biliyoruz, çünkü yukarda da gördüğümüz gibi 7×3'lük düzlem 2–boyanamıyor. Peki bir sıra daha ekleyebilir miyiz? Evet:



Bu düzlemi büyültüp bir başka 2-boyanabilir düzlem elde edemeyiz. Okur bunu kendi kendine doğrulayabilir. Ama bu tek başına 6×5'lik düzlemin 2-boyanabilir olmayacağı anlamına gelmez. 6×5'lik düzlemin 2-boyanamaz olduğu doğrudur. Bunu kanıtlamak için, 5×5'lik düzlemin 2-boyanamaz olduğunu kanıtlamak yeterlidir. Bunun kanıtını da okura bırakıyorum.

Demek ki 6×4 boyutundaki düzlem 2-boyanabilir ve daha büyük boyutlu 2-boyanabilir düzlem yoktur.

Şimdi sıra üç renge ve 3-boyanabilir düzlemlere geldi. Renklerimiz kırmızı, mavi ve yeşil olsun. Eğer düzlemde yatay (ya da dikey) yalnızca 3 doğru varsa, her doğruyu bir başka renge bo-

yayarak, 3-boyanabilir bir düzlem elde edebiliriz. Dolayısıyla, en az dört yatay ve en az dört dikey doğru olduğunu varsayacağız.

Eğer düzlemde herbiri en az 34 *noktalı en az dört paralel doğru varsa, aynı renk köşeli bir dikdörtgen de vardır, yani* 34×4 *boyutlu bir düzlem 3-boyanamaz.*

Birazdan çok daha iyi bir sonuç kanıtlayacağız ama şimdilik bunu kanıtlamakla yetinelim.

Birinci doğrunun üstünde 34 nokta var ve bu noktalar üç renge boyanmış. Güvercin Yuvası İlkesi'ne göre bu 34 noktanın en az 12 tanesi aynı renge boyanmış olmalı, diyelim kırmızıya boyanmışlar. İkinci doğruya ait olan yukardaki 12 kırmızı noktanın altındaki noktalara bakalım. Eğer bu 12 noktanın ikisi kırmızıysa, kırmızı bir dikdörtgen elde ederiz. Demek ki ikinci doğru üstünde en fazla bir tane kırmızı nokta olduğunu varsayabiliriz. Geriye kalan 11 nokta yeşile ve maviye boyanmıştır. Bu 11 noktanın en az 6'sı aynı renge boyanmış olmalı, diyelim maviye. Demek ki,

$$\begin{matrix} K & K & K & K & K & K \\ M & M & M & M & M & M \end{matrix}$$

şeklini elde ettik (noktaları artık göstermiyoruz, yalnızca renkleri gösteriyoruz.) Üçüncü doğrumuzu alalım ve bu doğru üstünde bulunan ve yukardaki altı noktanın hemen altındaki noktalara bakalım. Eğer bu noktaların ikisi kırmızıysa kırmızı bir dikdörtgen elde ederiz; eğer ikisi maviyse mavi bir dikdörtgen elde ederiz. Demek ki üçüncü doğru üzerinde en fazla bir kırmızı ve bir mavi nokta olduğunu, yani en az dört yeşil nokta olduğunu varsayabiliriz. Şimdi,

K	*K*	*K*	*K*
M	*M*	*M*	*M*
Y	*Y*	*Y*	*Y*

şeklini elde ettik. Son olarak dördüncü doğrumuzu ele alalım. Yukardaki dört noktanın altındaki noktalara bakalım. Bu dört noktanın ikisi aynı renkte olmalı. Bu renk ne olursa olsun, o renkte bir dikdörtgen elde ederiz.

Demek ki 3-boyanabilir bir düzlemde en az dört paralel doğru varsa her doğruda 34 nokta olamaz. Peki ya 33 nokta olabilir mi? Hayır, 33 nokta da olamaz. Ya 32 nokta? 32 nokta da olamaz. 19 nokta bile olamaz. Bunu kanıtlayalım.

Eğer düzlemde herbiri en az 19 *noktalı en az dört paralel doğru varsa, aynı renk köşeli bir dikdörtgen de vardır, yani* 19 × 4 *boyutlu bir düzlem 3-boyanamaz.*

Renklere 0, 1 ve 2 diyelim. 19 sütunumuz var ve her sütunda altalta 4 nokta var.

En az iki tane 0'a boyanmış noktası olan en fazla 6 sütun olabilir:

0	0	0			
0			0	0	
	0		0		0
		0		0	0

Yedinci bir sütunda iki tane 0 rengi olamaz.

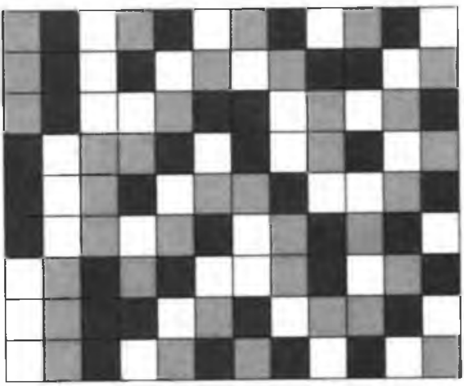
Diğer iki renk için de aynı şey geçerli. Demek ki 3 × 6 = 18 sütundan fazla olamaz. Ayrıca 18 sütunlu böyle bir boyama vardır:

0	0	0	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	0	0	0
0	1	1	0	0	2	1	2	2	1	1	0	2	0	0	2	2	1
1	0	2	0	2	0	2	1	0	1	0	1	0	2	1	2	1	2
2	2	0	2	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	2	1	2	2

Bir de 12 × 9 boyutlu düzlemi 3 renge boyayabildim:

0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
0	1	2	1	2	0	2	0	1	1	2	0
0	1	2	2	0	1	1	2	0	2	0	1
1	2	0	0	1	2	1	2	0	1	2	0
1	2	0	1	2	0	0	1	2	2	0	1
1	2	0	2	0	1	2	0	1	0	1	2
2	0	1	0	1	2	2	0	1	2	0	1
2	0	1	1	2	0	1	2	0	0	1	2
2	0	1	2	0	1	0	1	2	1	2	0

Bu düzlemi de renklendirelim:



Nasıl bulduğumu sormayın, ben de bilmiyorum. Deneye yanıla...

Ardışık Sayıların Toplamı

Bu yazıda "sayı" sözcüğünü, 1, 2, 3, 4, 5 gibi pozitif tamsayılar için kullanacağız. Konumuz ardışık sayıların toplamı. 7 ve 8 gibi, ya da 7, 8 ve 9 gibi ardarda gelen sayılara ***ardışık*** denir.

Örneğin, 17 iki ardışık sayının toplamıdır:

$$17 = 8 + 9.$$

21, üç ardışık sayının toplamıdır:

$$21 = 6 + 7 + 8.$$

21, aynı zamanda altı ardışık sayının toplamıdır:

$$21 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6.$$

45, iki ya da daha çok ardışık sayının toplamı olarak beş değişik biçimde yazılır:

$$\begin{aligned} 45 &= 22 + 23 \\ &= 14 + 15 + 16 \\ &= 7 + 8 + 9 + 10 + 11 \\ &= 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 \\ &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 \end{aligned}$$

44, sekiz ardışık sayının toplamıdır:

$$44 = 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9$$

(ve 44, iki ya da daha çok ardışık sayının toplamı olarak başka türlü yazılamaz.) Ama 1, 2 ve 4 sayıları iki ya da daha çok

ardışık sayının toplamı değildirler. 7 ve 11 sayıları iki ardışık sayının toplamı olarak yazılabilirler ama üç veya daha fazla ardışık sayının toplamı olarak yazılamazlar.

Bu yazıda hangi sayıların en az iki ve en az üç ardışık sayının toplamı olduğunu bulmaya çalışacağız.

Çoğu zaman olduğu gibi (ama her zaman değil), burda da, araştırmaya deneyle başlamak yararlı olabilir. Örneğin 1'den 50'ye kadar olan sayılardan hangilerinin en az iki ardışık sayının toplamı olduğunu bulmaya çalışırsanız, hem sorunun yanıtını tahmin edebilirsiniz, hem de tahmininizin doğru olduğunu nasıl kanıtlamanız gerektiğini anlayabilirsiniz.

İlk elli sayıya gözatalım. Bu sayıları en az iki ardışık sayının toplamı olarak yazmaya çalışalım. Aşağıdaki tabloda en kısa ve en uzun ardışık toplamları bulacaksınız:

1	yazılamaz	26	5 + 6 + 7 + 8
2	yazılamaz	27	13 + 14; 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7
3	1 + 2	28	1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7
4	yazılamaz	29	14 + 15
5	2 + 3	30	9 + 10 + 11; 4 + 5 + 6 + 7 + 8
6	1 + 2 + 3	31	20 + 21
7	3 + 4	32	yazılamaz
8	yazılamaz	33	16 + 17; 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8
9	4 + 5; 2 + 3 + 4	34	7 + 8 + 9 + 10
10	1 + 2 + 3 + 4	35	17 + 18; 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8
11	5 + 6	36	11 + 12 + 13; 1 + 2 + ... + 8
12	3 + 4 + 5	37	13 + 14
13	6 + 7	38	8 + 9 + 10 + 11
14	2 + 3 + 4 + 5	39	19 + 20; 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9
15	7 + 8; 1 + 2 + 3 + 4 + 5	40	6 + 7 + 8 + 9 + 10
16	yazılamaz	41	20 + 21
17	8 + 9	42	13 + 14 + 15; 3 + 4 + ... + 9
18	5 + 6 + 7; 3 + 4 + 5 + 6	43	21 + 22
19	9 + 10	44	2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9
20	2 + 3 + 4 + 5 + 6	45	22 + 23; 1 + 2 + ... + 9
21	10 + 11; 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6	46	10 + 11 + 12 + 13
22	4 + 5 + 6 + 7	47	23 + 24
23	11 + 12	48	15 + 16 + 17
24	7 + 8 + 9	49	24 + 25
25	12 + 13; 3 + 4 + 5 + 6 + 7	50	8 + 9 + 10 + 11 + 12

Birinci Soru. *Hangi sayılar ardışık iki sayının toplamıdır?*

Birinci Sorunun Yanıtı: Okur yanıtı okumadan önce düşünmelidir. Psikolojik olarak yardım edecekse söyleyeyim: Pek o ka-

dar zor bir soru değil. Birkaç deneme sorunun yanıtını verecektir. Biz de deneyelim:

$$\begin{aligned}
1 + 2 &= 3\\
2 + 3 &= 5\\
3 + 4 &= 7\\
4 + 5 &= 9\\
5 + 6 &= 11\\
6 + 7 &= 13\\
7 + 8 &= 15\\
8 + 9 &= 17\\
9 + 10 &= 19\\
10 + 11 &= 21\\
11 + 12 &= 23
\end{aligned}$$

Görüldüğü gibi, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23 sayılarını iki ardışık sayının toplamı olarak yazabildik. Bu sayıların hep tek sayı oldukları gözünüzden kaçmamıştır. Doğru, eğer iki ardışık sayıyı toplarsak hep tek sayı elde ederiz.

Neden?

Kanıtlayalım. Ardışık iki sayıdan biri tektir, öbürü çift; dolayısıyla bu iki sayıyı topladığımızda tek sayı elde ederiz. Demek ki iki ardışık sayının toplamı hep tek sayıdır.

Bunun tersi de hemen hemen doğrudur: 1 dışında her tek sayı, iki ardışık sayının toplamıdır. Örneğin, 125, 62 + 63 olarak; 147, 73 + 74 olarak yazılabilir. 1 dışında her tek sayının iki ardışık sayının toplamı olduğunu kanıtlayabilir miyiz?

Evet.

Kanıtı da bayağı kolay: $n \neq 1$ herhangi bir tek sayı olsun. n tek olduğundan, n'yi $2m + 1$ olarak yazabiliriz. Şimdi n'yi,

$$m + (m + 1)$$

olarak, yani iki ardışık sayının toplamı olarak yazabiliriz. (Not: $n > 1$ olduğundan, $m \geq 1$'dir.)

İkinci Soru. *Hangi sayılar üç ardışık sayının toplamıdır?*

İkinci Sorunun Yanıtı: Yukardaki gibi birkaç deneme yapmak sorunun yanıtını verecektir:

$$1 + 2 + 3 = 6$$
$$2 + 3 + 4 = 9$$
$$3 + 4 + 5 = 12$$
$$4 + 5 + 6 = 15$$
$$5 + 6 + 7 = 18$$
$$6 + 7 + 8 = 21$$

Hep üçe bölünen sayılar elde ediyoruz. Hepsini mi? Hayır! 3 sayısı, üç ardışık sayının toplamı değildir. Ama 3 dışında üçe bölünen her sayı üç ardışık sayının toplamıdır... gibi gözüküyor... Demek ki savımız şu olmalı: Üç ardışık sayının toplamı üçe bölünür ve 3 dışında üçe bölünen her sayı üç ardışık sayının toplamıdır. Savımızı kanıtlayalım.

Üç ardışık sayı alalım. Bu sayıların ortancasına m diyelim. Demek ki üç sayımız $m - 1$, m ve $m + 1$. Bu üç sayıyı toplayalım:

$$(m - 1) + m + (m + 1) = 3m$$

elde ettik. Bu sayı üçe bölünür. Demek ki, her üç ardışık sayının toplamı üçe bölünür.

Şimdi de üçe bölünen ama 3 olmayan herhangi bir sayı ele alalım. Bu sayıya n diyelim ve n'nin üç ardışık sayının toplamı olduğunu kanıtlayalım. Önceki paragraftaki hesaplar aşağı yukarı kanıtı veriyor: Eşitliğin solundaki ortanca sayı, toplamın üçte biri. n'yi üçe bölelim. Çıkan sayıyı, bir öncekini ve bir sonrakini toplayalım. m'yi elde ederiz. Örneğin, $n = 27$ ise, $n/3 = 9$ olur ve $27 = 8 + 9 + 10$ bulunur.

Biçimsel olarak şöyle kanıtlarız: n üçe bölündüğünden, n'yi $3m$ olarak yazabiliriz: $n = 3m$. Şimdi aşağıdaki eşitliğe bakın:

$$n = 3m = (m - 1) + m + (m + 1).$$

Demek ki, n, üç ardışık sayının ($m - 1$'in, m'nin ve $m + 1$'in) toplamıdır. (Not: $n > 3$ olduğundan, $m - 1 \geq 1$'dir.)

Savımız kanıtlanmıştır.

Üçüncü Soru. *Hangi sayılar beş ardışık sayının toplamıdır?*

Üçüncü Sorunun Yanıtı: 5 ve 10 dışında, beşe bölünen her sayı beş ardışık sayının toplamıdır. Örneğin,

$$15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$$
$$20 = 2 + 3 + 4 + 5 + 6$$
$$25 = 3 + 4 + 5 + 6 + 7$$

Bu hesaplar da kanıtı aşağı yukarı veriyor. Eşitliğin sağ tarafının ortanca sayısı toplamın beşte biri. n, beşe bölünen ama 5 ya da 10 olmayan bir sayı olsun. $n = 5m$ olarak yazalım. Şimdi n sayısı,

$$m - 2, m - 1, m, m + 1, m + 2$$

ardışık sayılarının toplamıdır. (Not: $n \geq 15$ olduğundan, $m - 2 = n/5 - 2 \geq 1$ olur.)

Dördüncü Soru. *Hangi sayılar yedi ardışık sayının toplamıdır?*

Dördüncü Sorunun Yanıtı: Bu sorunun yanıtı da ikinci ve üçüncü soruların yanıtı gibidir. 7, 14 ve 21 dışında yediye bölünen her sayı yedi ardışık sayını toplamıdır. Biçimsel kanıtı okura bırakıyorum.

Beşinci Soru. *En az iki ardışık sayının toplamı olan sayıların* 1*'den büyük bir tek sayıya bölündüklerini, yani* 2^k *biçiminde yazılamayacaklarını kanıtlayın.*

Beşinci Sorunun Yanıtı: n, en az iki ardışık sayının toplamı olan bir sayı olsun. Diyelim, n sayısı,

$$b, b + 1, b + 2, ..., b + r$$

($r + 1$ tane) ardışık sayının toplamı ($r \geq 1$ elbette.) Yani

$$n = b + (b + 1) + (b + 2) + \cdots + (b + r). \qquad (1)$$

Bu toplamda $r + 1$ tane b var. Demek ki, toplam

$$(r + 1)b + [1 + 2 + \cdots + r]$$

sayısına eşit. 1'den r'ye kadar olan sayıların toplamı bilindiği üzere

$$\frac{r(r+1)}{2}$$

sayısına eşittir[1]. Demek ki

$$n = (r+1)b + \frac{r(r+1)}{2}.$$

$r + 1$'i dışarı çıkaralım ve eşitliği 2'yle çarpalım.

$$2n = (r + 1)(2b + r) \qquad (2)$$

elde ederiz. Eğer $r + 1$ ve $2b + r$ sayılarından birinin tek olduğunu kanıtlarsak işimiz iştir, çünkü bu tek sayı n'yi bölmek zorunda. Kanıtlayalım: Eğer $r + 1$ tekse bir sorun yok. Eğer $r + 1$ çiftse, r tektir ve dolayısıyla $2b + r$ de tektir. Kanıtımız bitmiştir.

Yukardaki kanıtta, (1) eşitliğinden (2) eşitliğini elde ettiğimiz okurun gözünden kaçmamalıdır. Birazdan bu olguyu kullanacağız.

Altıncı Soru. *Hangi sayılar iki veya daha çok ardışık sayının toplamı olarak yazılabilir?*

Altıncı Sorunun Yanıtı: Önce bir tahminde bulunmak gerekiyor. Şimdiye değin bulduklarımızı gözden geçirelim:

Her şeyden önce beşinci soruya göre, 1, 2, 4, 8, 16 gibi 2^n biçiminde yazılan sayılar iki ya da daha fazla ardışık sayının toplamı olamazlar. Öbür sayılara bakalım.

Birinci soruya göre, 1 dışında her tek sayı iki ardışık sayının toplamıdır.

Üçe bölünen sayılara bakalım. İkinci soruya göre, 6, 9, 12, 15 gibi üçe bölünen sayılar üç ardışık sayının toplamıdır. 3 tek olduğundan, 3 de iki ardışık sayının toplamıdır. Demek ki üçe bölünen her sayı en az iki ardışık sayının toplamıdır.

Şimdi de beşe bölünen sayılara bakalım. Üçüncü soruya göre, 5 ve 10 dışında beşe bölünen her sayı beş ardışık sayının toplamıdır. Tek olduğundan, 5 de iki ardışık sayının toplamıdır. Ya 10?

$$10 = 1 + 2 + 3 + 4$$

---

1 Bu eşitlik çok bilinen bir eşitliktir. [11]'in *Pisagor ve Sayılar* yazısına bakınız.

olduğundan, 10 da ardışık sayıların toplamıdır. Sonuç olarak beşe bölünen her sayı en az iki ardışık sayının toplamıdır.

Sıra yediye bölünen sayılara geldi. Dördüncü soruya göre 7, 14 ve 21 dışında yediye bölünen her sayı yedi ardışık sayının toplamıdır. 7 ve 21 tektir, dolayısıyla iki ardışık sayının toplamıdırlar. 14'ü ardışık sayıların toplamı olarak yazmak biraz daha zor, ama yazılıyor:

$$14 = 2 + 3 + 4 + 5.$$

Demek ki yediye bölünen her sayı en az iki ardışık sayının toplamıdır.

Tahminimiz ne olmalı? 2^k biçiminde yazılamayan her sayı en az iki ardışık sayının toplamı olabilir mi? Galiba, ama pek emin değiliz.

11'e bölünen sayılara bakalım. Bu sayıların çoğunun 11 ardışık sayının toplamı olduğunu artık tahmin edebiliriz. Sayımıza n diyelim. n'yi 11'e bölelim. Çıkan sayıya m diyelim. Şimdi aşağıdaki 11 ardışık sayıyı toplayalım:

$$m - 5, m - 4, m - 3, m - 2, m - 1,$$
$$m, m + 1, m + 2, m + 3, m + 4, m + 5.$$

$11m$, yani n buluruz.

Ama burda $m - 5 > 0$ olmalı, yani $n/11 - 5 > 0$ olmalı, yani $n > 55$ olmalı. Peki, $x = 11, 22, 33, 44, 55$ ise ne yapacağız? Bu sayılar en az iki ardışık sayının toplamı mıdır? 11, 33 ve 55 tek olduklarından bu sayıları iki ardışık sayının toplamı olarak yazabiliriz. 22 ve 44 de en az iki ardışık tamsayının toplamıdır:

$$22 = 4 + 5 + 6 + 7$$
$$44 = 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9.$$

Demek ki 11'e bölünen her sayı en az iki ardışık sayının toplamıdır.

Galiba tahminimiz doğru, galiba 2^k biçiminde yazılamayan her sayı (yani 1'den büyük bir tek sayıya bölünen her sayı) en az iki ardışık sayının toplamıdır. Artık savımızı yazabiliriz:

Sav. 2^k *biçiminde yazılamayan her sayı en az iki ardışık sayının toplamıdır. Ve en az iki ardışık sayının toplamı olan hiçbir sayı* 2^n *biçiminde yazılamaz.*

Savın Kanıtı: Savımızın ikinci önermesini beşinci soruda kanıtlamıştık. Birinci önermeyi kanıtlayalım. n, 2^k biçiminde yazılmayan bir sayı olsun. Demek ki n, 1'den büyük bir tek sayıya bölünür. n'yi bölen tek sayıyı $2u + 1$ olarak yazalım ve bölme işleminin sonucuna a diyelim. Demek ki,

$$n = (2u + 1)a. \tag{3}$$

Şimdi $a - u$ ile $a + u$ arasındaki $2u + 1$ sayıyı toplayalım.

$$(a - u) + (a - u + 1) + \cdots + (a - 1) + a + (a + 1) + \cdots$$
$$+ (a + u - 1) + (a + u).$$

Bu toplamda bir sürü terim sadeleşir. Örneğin, birinci ve sonuncu terimlerdeki u'ler sadeleşir, ikinci ve sondan ikinci terimlerdeki u − 1'ler sadeleşir... a'lar dışındaki bütün terimler sadeleşir. Sonuç olarak $2u + 1$ tane a'yı toplarız, yani toplamın sonucu $(2u + 1)a$'dır, yani n'dir. Eğer toplamdaki ilk sayı, yani $a - u$ pozitif ise, n'yi bu biçimde $2u + 1$ ardışık sayının toplamı olarak yazabiliriz. $a - u \leq 0$ ise ne yapacağız?

Bundan böyle $a - u$ sayısnın pozitif olmadığını varsayalım, yani

$$a \leq u$$

eşitsizliğini varsayalım. Bu durumda ne yapmalıyız? Önce yanıtı vereyim. Yanıtı nasıl bulduğumu sonra açıklayacağım.

$$b = u - a + 1 \tag{4}$$

ve

$$r = 2a - 1 \tag{5}$$

olsun. b'nin en az 1 olduğuna dikkatinizi çekerim. b'den $b + r$'ye kadar olan sayıları, yani

$$b, b + 1, b + 2, ..., b + r$$

sayılarını toplayalım:

$$b + (b + 1) + (b + 2) + \cdots + (b + r).$$

Toplamın x'e eşit olduğunu kanıtlayacağım. Beşinci sorudaki gibi hesaplarsak, toplamın

$$(r+1)b+\frac{r(r+1)}{2}$$

sayısına eşit olduğunu görürüz. Bu sayıyı (3), (4) ve (5)'teki tanımları kullanarak hesaplayalım:

$$(r+1)b+\frac{r(r+1)}{2}=(r+1)\left(b+\frac{r}{2}\right)=(r+1)\frac{2b+r}{2}$$

$$=^{5} 2a\frac{2b+2a-1}{2}=a(2b+2a-1)$$

$$=^{4} a(2(u-a+1)+2a-1)=a(2u+1)$$

$$=^{3} n.$$

Sözverdiğimiz gibi toplamın n olduğunu bulduk.

Sonuç olarak, 2^k biçiminde yazılamayan her n sayısının en az iki ardışık sayının toplamı olduğunu bulduk. Hatta toplamamız gereken ardışık sayıları da bulduk: Önce n'yi $(2u + 1)a$ olarak yazalım.

✶ Eğer $a > u$ ise, n, $a - u$'den $a + u$'ye kadar olan $2u + 1$ ardışık sayının toplamıdır.

✶ Eğer $a \leq u$ ise, n, $u - a + 1$'den $u + a$'ya kadar olan $2a$ ardışık sayının toplamıdır.

Şimdi $a \leq u$ şıkkında, ardışık sayıları, yani b ve r sayılarını nasıl bulduğumu göstereyim.

$$n = (2u + 1)a$$

eşitliğini biliyoruz ve n'yi en az iki ardışık sayının toplamı olarak yazmak istiyoruz. Ardışık sayıları bildiğimizi varsayalım bir an. Diyelim bu sayılar b'yle $b + r$ arasındaki sayılar. b'yle r'yi bulmak istiyoruz. b'yle $b + r$ arasındaki sayıları toplarsak

$$(2u+1)a=n=(r+1)\frac{2b+r}{2},$$

buluruz. Demek ki,

$$(r+1)b+\frac{r(r+1)}{2}=(r+1)\left(b+\frac{r}{2}\right)=(r+1)\frac{2b+r}{2}$$

yani

$$2a(2u + 1) = (r + 1)(2b + r).$$

r'yi $2a = r + 1$ eşitliğini sağlayacak biçimde seçelim. Demek ki,

$$r = 2a - 1.$$

Bu (5) eşitliğini verir. b'yi de

$$2u + 1 = 2b + r$$

eşitliğini sağlayacak biçimde seçelim. Demek ki

$$2u = 2b + r - 1 = 2b + (2a - 1) - 1 = 2b + 2a - 2,$$

yani

$$b = u - a + 1.$$

Bu da (4) eşitliğidir.

Yedinci Soru. *Asal bir sayının üç ya da daha fazla ardışık sayının toplamı olamayacağını kanıtlayın.*

Yedinci Sorunun Yanıtı: p bir asal sayı olsun. Bir an için p'nin en az üç ardışık sayının toplamı olduğunu varsayalım. Diyelim, p asal sayısı,

$$b, b + 1, b + 2, ..., b + r$$

sayılarının toplamı (burada $r \geq 2$ ve $b > 0$.) Bir çelişki elde edeceğiz. Aynen beşinci sorudaki gibi,

$$2p = (r + 1)(2b + r) \qquad (2)$$

eşitliğini elde ederiz.

Eğer $r + 1$ tekse, (2) eşitliğinden dolayı, $r + 1$, p'yi böler. p asal olduğundan, $r + 1 = p$ olmalı. Bu ve (2)'den $2b + r = 2$ çıkar. Ama $b > 0$ ve $r \geq 2$, dolayısıyla $2b + r = 2$ eşitliği olanaksız.

Eğer $r + 1$ çiftse, r tektir. r tek olduğundan, $2b + r$ de tektir. (2) eşitliğinden dolayı, $2b + r$, p'yi böler. p asal olduğundan, $2b + r = p$ olmalı. Bundan ve (2)'den, $2 = r + 1$ çıkar. Yani $r = 1$ ve bu bir çelişkidir. Önermemiz kanıtlanmıştır.

Sekizinci Soru. *Hangi sayılar üç veya daha çok ardışık sayının toplamıdır?*

Sekizinci Sorunun Yanıtı: *Asal olmayan ve 2^k biçiminde yazılamayan her sayı en az üç ardışık sayının toplamıdır.*

Sekizinci Sorunun Yanıtının Kanıtı: Bu savımızı kanıtlamak için altıncı ve yedinci soruların yanıtlarından yararlanacağız.

Eğer n en az üç ardışık sayının toplamıysa, altıncı soruya göre n, 2^k biçiminde yazılamaz ve yedinci soruya göre n asal olamaz. Şimdi bu önermenin tersini kanıtlayacağız: Eğer n asal değilse ve 2^k biçiminde yazılmıyorsa, n en az üç ardışık sayının toplamıdır.

n'nin asal olmadığını ve 2^k biçiminde yazılamayacağını varsayalım. Demek ki öyle bir $u \geq 1$ ve $a \geq 2$ vardır ki,

$$n = (2u + 1)a$$

eşitliği geçerlidir.

Eğer $a > u$ ise, altıncı soruda (✶ işaretinin olduğu paragrafta) n'nin $2u + 1 \geq 3$ tane ardışık sayının toplamı olduğunu gördük. Demek ki bu durumda bir sorun yok.

Eğer $a \leq u$ ise, gene altıncı soruda n'nin $2a$ tane (yani en az 4 tane) ardışık sayının toplamı olduğunu gördük. Bu durumda da bir sorun yok.

Hiç sorun kalmadı!

Sevdiğim Birkaç Soru

Matematikte öyle sorular vardır ki, yanıtı bulmak önce çok zor gibi gelebilir, sonradan - saatler, günler, aylar, hatta kimi zaman yıllar sonra - yanıtın çok basit olduğu anlaşılır. Bir benzetme yaparak, matematiği andıran bir örnek vereyim.

Bir tren İstanbul'dan Ankara'ya doğru saatte 100 km'yle gidiyor. İkinci bir tren Ankara'dan İstanbul'a doğru saatte 150 km'yle gidiyor. İkinci tren birinci trenden 1 saat sonra kalktığına göre, iki tren karşılaştıklarında hangisi İstanbul'a daha yakındır?

Bu soruyu yanıtlamak için hesaba kitaba gerek yok. İki tren karşılaştıklarında, her ikisinin de hem Ankara'ya hem İstanbul'a hem de Adana'ya uzaklıkları aynıdır!

John Von Neumann 20'nci yüzyılın birinci yarısında yaşamış ve matematiğin hemen hemen her dalına katkısı olmuş büyük bir matematikçidir. Elektrikle işleyen bilgisayarı ilk bulanlardan biridir. Kümeler kuramına ve analize çok önemli katkıları olmuştur. Ayrıca oyunlar kuramının temellerini atmıştır. Von Neumann'ın daha birsürü katkısı vardır matematiğe, çalışmadığı dal kalmamıştır nerdeyse.

Von Neumann'a bir dostu şu soruyu sormuş: İki tren aynı ray üzerinde birbirine doğru hareket ederler. Bu iki tren arasında bir sinek vardır. Sinek trenlerden birine dokununca, yön de-

ğiştirip öbür trene doğru gider. Bir süre sonra öbür trene çarpar elbet ve o zaman gene yön değiştirip birinci trene doğru gider. Sinek böylece iki tren arasında yol alır. İki tren çarpışınca sinek ezilir. Trenlerin arasında başlangıçta 100 km. olduğuna göre ve trenler aynı anda hareket ettiklerine göre ve trenlerden biri saatte 5 öbürü saatte 15 km gittiğine göre ve sinek saatte 25 km'yle uçtuğuna göre, sinek ne zaman ezilir?

Bu sorunun yanıtını bulmak için terimleri oldukça karmaşık sonsuz bir dizi toplanabilir, ki çoğunluk bu yöntemi seçer. Oysa yanıt daha kolay bir yöntemle bulunabilir. Trenler saatte 5 + 15, yani 20 km'yle birbirlerine yaklaşmaktadır. Aralarında başlangıçta 100 km olduğuna göre, iki tren 100/20, yani 5 saat sonra çarpışır. Dolayısıyla sinek 5 saat sonra ezilir.

Von Neumann bir iki dakika kadar düşündükten sonra,

– 5 saat sonra, yanıtını vermiş.

Soruyu soran dostu, Von Neumann'ın yanıtı çok çabuk bulmasından kuşkulanıp,

– Sen bu soruyu biliyordun, demiş.

Von Neumann şaşırmış.

– Niye öyle diyorsun, demiş, oldukça kolay bir soru, sonsuz diziyi toplamak yeterli...

Bu kadar komiklik yeter! Bu yazıda matematikten birkaç güzel kanıt örneği vereceğim.

Birinci Soru. Bir doğal sayıyı çeşitli biçimlerde doğal sayıların toplamı olarak yazabiliriz. Örneğin, 3:

$$3$$
$$2 + 1$$
$$1 + 2$$
$$1 + 1 + 1$$

olarak yazılabilir. Ya da 4:

$$\begin{array}{l} 4 \\ 3+1 \\ 1+3 \\ 2+2 \\ 2+1+1 \\ 1+2+1 \\ 1+1+2 \\ 1+1+1+1 \end{array}$$

olarak yazılabilir. Görüldüğü gibi 3'ü dört değişik biçimde, 4'ü sekiz değişik biçimde yazabiliyoruz.

Herhangi bir n doğal sayısı, doğal sayıların toplamı olarak kaç farklı biçimde yazılabilir?

Birinci Sorunun Yanıtı: Doğru yanıtı bulmak pek zor değil. Biraz denemeyle n sayısının 2^{n-1} biçimde doğal sayıların toplamı olarak yazılacağı anlaşılır.

Yanıtın neden doğru yanıt olduğunu açıklamak için önce bir örnek alalım. 6'yı kaç biçimde doğal sayıların toplamı olarak yazabileceğimize bakalım. 6'yı altı tane 1'le, yani

111111

olarak gösterelim. Şimdi $6 = 4 + 2$ eşitliğini

1111|11

olarak, $6 = 3 + 1 + 2$ eşitliğini

111|1|11

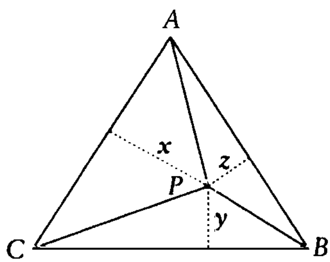
olarak gösterebiliriz. Demek ki 6'yı doğal sayıların toplamı olarak yazmak demek, altı tane 1 arasına çubuk yerleştirmek demektir. Altı tane 1 arasına kaç biçimde çubuk yerleştirebiliriz? Çubuk yerleştirebileceğimiz 5 yerimiz var. Bu 5 yerin herbirine çubuk koyabiliriz ya da koymayabiliriz. Demek ki her yer için 2 olasılığımız var: çubuk koymak ya da koymamak. Dolayısıyla 5 yer için $2^5 = 32$ olasılığımız var. Sonuç olarak, 6'yı 32 değişik biçimde doğal sayıların toplamı olarak yazabiliriz.

Herhangi bir n doğal sayısı için yanıt yukardaki tartışmadan anlaşılmıştır. n'yi 2^{n-1} biçimde doğal sayıların toplamı olarak yazabiliriz. Neden? Yukardaki gibi n'yi n tane 1'le gösterelim. Her iki 1'in arasına bir çubuk yerleştireceğiz ya da yerleştirmeyeceğiz. Her yer için 2 seçeneğimiz var: Çubuk koymak ya da koymamak. $n - 1$ tane yerimiz olduğundan ve her yere çubuk yerleştirip yerleştirmemekte özgür olduğumuzdan, toplam 2^{n-1} seçeneğimiz vardır.

İkinci Soru. *Ardışık 2n pozitif doğal sayı arasından n + 1 tanesi seçiliyor*[1]*. Seçim ne olursa olsun, bu n + 1 sayıdan en az ikisinin ortak böleninin 1 olduğunu kanıtlayın.*

İkinci Sorunun Kanıtı: Ardışık $2n$ sayıdan $n + 1$ tanesi seçildiğinde, bu $n + 1$ sayıdan en az ikisi ardışık olmak zorundadır, yani biri a öbürü $a + 1$ olmalıdır. Bu iki sayının ortak böleni, farkları olan $(a + 1) - a = 1$ sayısını da bölmelidir, yani 1 olmalıdır.

Üçüncü Soru. *Eşkenar bir üçgenin içindeki her noktanın üç kenara olan uzaklıklarının toplamının hep aynı olduğunu kanıtlayın*[2].



Üçüncü Sorunun Kanıtı: Eşkenar üçgenimize ABC diyelim. Üçgenimizin kenarları a, yüksekliği de h olsun. Demek ki üçgenimizin alanı $ah/2$'dir.

1 8, 9, 10 gibi ardarda gelen sayılara ardışık sayılar denir.
2 Bu sonuca Viviani Teoremi denir. Viviani İtalyandır ve 1622-1703 yılları arasında yaşamıştır.

Üçgenimizin içinden herhangi bir P noktası alalım. P'nin kenarlara olan uzaklıklarına x, y, z diyelim. P'yle A, B ve C köşeleri arasındaki üç doğruyu çizersek, üçgenimizi üç küçük üçgene bölmüş oluruz: APC, CPB ve BPA üçgenlerine. Bu üçgenlerin alanları sırasıyla $ax/2$, $ay/2$, $az/2$'dir. Demek ki bu üç sayının toplamı ABC üçgeninin alanı, yani $ah/2$ olmalı:

$$ax/2 + ay/2 + az/2 = ah/2.$$

Sadeleştirirsek $x + y + z = h$ buluruz. Demek ki, P noktasının kenarlara olan uzaklıklarının toplamı h'dir. Bu sayının P'den bağımsız olduğunu okurların dikkatine sunarız.

Dördüncü Soru. Her doğal sayının dört doğal sayının karelerinin toplamı olduğu bilinen bir teoremdir. Örneğin,

$$\begin{aligned}
0 &= 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2\\
1 &= 1^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2\\
2 &= 1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2\\
3 &= 1^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2\\
4 &= 2^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2\\
5 &= 2^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2\\
6 &= 2^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2\\
7 &= 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2\\
8 &= 2^2 + 2^2 + 0^2 + 0^2\\
9 &= 2^2 + 2^2 + 1^2 + 0^2\\
10 &= 2^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2.
\end{aligned}$$

Bunun gibi, 63, $5^2 + 5^2 + 3^2 + 2^2$ olarak yazılabilir. Bu teoremi doğru kabul ederek (ki doğru), *her pozitif kesirli sayının dört kesirli sayının karelerinin toplamı olduğunu kanıtlayın.*

Dördüncü Sorunun Kanıtı: k pozitif ve kesirli bir sayı olsun. İki a ve b doğal sayısı için, $k = a/b$ eşitliği doğrudur. ab bir doğal sayıdır, dolayısıyla, ab dört doğal sayının karelerinin toplamıdır, diyelim x, y, z ve t tamsayılarının karelerinin toplamı:

$$ab = x^2 + y^2 + z^2 + t^2.$$

Şimdi k'nin dört kesirli sayının karesi olduğunu kanıtlayabiliriz:

$$k = \frac{a}{b} = \frac{ab}{b^2} = \frac{x^2 + y^2 + z^2 + t^2}{b^2} = \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} + \frac{t^2}{b^2}$$
$$= \left(\frac{x}{b}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{b}\right)^2 + \left(\frac{t}{b}\right)^2$$

Beşinci Soru. Şu sonsuz diziyi ele alalım:

$$-2, 4, -8, 16, -32, 64, -128, \ldots$$

Bu dizi bir büyür, bir küçülür. Eğer bu diziden negatif sayıları çıkarırsak geriye artan bir dizi kalır. Bir başka deyişle,

$$4, 16, 64, 256, \ldots$$

dizisi ilk dizinin durmadan artan bir altdizisidir.

Şimdi, sonsuz herhangi bir

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$$

gerçel sayılar dizisi alalım. *Bu dizinin ya hiç azalmayan, ya da hiç artmayan sonsuz bir altdizisi olduğunu kanıtlayın.* Daha matematiksel bir deyişle, bu dizide öyle sonsuz tane a_{n_i} terimi olduğunu kanıtlayın ki, bu terimler, ya hep

$$n_i \leq n_j \text{ ise } a_{n_i} \leq a_{n_j}$$

koşulunu ya da hep

$$n_i \leq n_j \text{ ise } a_{n_i} \geq a_{n_j}$$

koşulunu sağlasın.

Beşinci Sorunun Kanıtı: Eğer dizinin bir terimi kendisinden sonra gelen her terimden büyükeşitse, o terime ***büyük terim*** diyelim. Bir başka deyişle, a_n terimi,

$$m \geq n \text{ ise } a_m \leq a_n$$

koşulunu sağlıyorsa, a_n'ye büyük terim diyelim.

İki şıkkımız var: Dizide ya sonsuz sayıda büyük terim vardır ya da sonlu tane. Eğer sonsuz sayıda büyük terim varsa, büyük terimler dizisi hiç artmayan bir sonsuz dizidir. Eğer sonlu tane büyük terim varsa, dizinin en son büyük teriminden sonra gelen terimlere bakalım. Bu terimler büyük terim ola-

mazlar. Demek ki bu terimlerin herbirinden sonra daha büyük bir terim bulabiliriz. Örneğin, a_n, dizinin en son büyük terimi olsun. a_{n+1} bulacağımız altdizinin birinci sayısı olacak. a_{n+1}, terimi büyük terim olmadığında, a_{n+1}'den sonra daha büyük bir terim vardır. Bu terim altdizimizin ikinci terimi olacak. İkinci terimiz de büyük terim olmadığından, seçtiğimiz ikinci terimden sonra daha büyük bir terim vardır. Bu terim altdizimizin üçüncü terimi olsun. Seçtiğimiz üçüncü terimden sonra da bu terimden daha büyük bir terim vardır... Bunu böylece sonsuza değin sürdürebiliriz ve durmadan artan sonsuz bir dizi elde ederiz.

Altıncı Soru. *n herhangi bir tamsayı olsun.*

$$(21n + 4)/(14n + 3)$$

kesirli sayısını ele alalım. n ne olursa olsun, bu kesirli sayının bu gösteriminin sadeleşmeyeceğini kanıtlayın[3].

Altıncı Sorunun Kanıtı: Aslında, $21n + 4$ ve $14n + 3$ sayılarının en büyük ortak böleninin 1 olduğunu, yani bu iki sayının birbirine asal olduğunu kanıtlamamız isteniyor. Kanıtlayalım...

p, bu iki sayıyı bölen bir doğal sayı olsun. p'nin 1'e eşit olduğunu kanıtlamalıyız.

$21n + 4$ sayısı p'ye bölünüyor. Demek ki, bir a tamsayısı için,

$$21n + 4 = ap$$

eşitliği geçerlidir. $14n + 3$ sayısı da p'ye bölünüyor. Demek ki, bir b tamsayısı için,

$$14n + 3 = bp$$

eşitliği geçerlidir. Bu denklemleri altalta yazalım:

$$21n + 4 = ap$$
$$14n + 3 = bp.$$

Şimdi birinci denklemi 2'yle, ikinci denklemi 3'le çarpalım:

---

3 Bu soru lise öğrencilerinin katıldığı 1959 Uluslararası Matematik Olimpiyatları'nda sorulmuştur.

$$42n + 8 = 2ap$$
$$42n + 9 = 3bp$$

denklemlerini elde ederiz. Birinci denklemi ikinciden çıkarırsak,

$$1 = 3bp - 2ap$$

denklemini elde ederiz. Bu denklemin sağındaki sayı $(3b - 2a)p$'ye eşit ve dolayısıyla p'ye bölünür. Demek ki denklemin solundaki sayı da p'ye bölünmeli. Yani 1, p'ye bölünmeli... Yani $p = 1$ olmalı!

Dilediğimizi kanıtladık.

Üç Oyun

Birinci Oyun. Oyunumuz en az iki kişi arasında oynanıyor. Ne iskambil kâğıdına ne kalem kâğıda ne de bir tahtaya gereksinim var bu oyunu oynamak için. Yolda, otobüste, vapurda, sinemada, tiyatroda, tarlada, fabrikada, atölyede, her yerde de oynayabilirsiniz.

Biz oyunu iki kişi arasında oynatacağız ve açıklaması kolay olsun diye çakıl taşları kullanacağız. Ama dediğim gibi, bu oyunu oynamak için hiçbir araç gerece gereksinim yok.

Belli bir sayıda çakıl taşı koyun ortaya. Her oyuncu sırası geldiğinde bu kümeden 1, 2 ya da 3 çakıl taşı alacak. Oynayamayan, yani yapacak hamle bulamayan ilk oyuncu oyunu kaybeder. Bir başka deyişle, kümede çakıl taşı bırakmayan oyuncu oyunu kazanır.

Örneğin, oyunun başında 4 taş varsa, oyuna başlayan oyuncu oyunu kaybeder. 1 taş alsa, öbür oyuncu kalan 3 taşı alır. 2 taş alsa öbür oyuncu kalan 2 taşı alır. 3 taş alsa, öbür oyuncu kalan tek taşı alır. Demek ki 4 taşlı oyunda, eğer ikinci oyuncu iyi oynarsa, birinci oyuncu oyunu kaybeder.

6 taşlı oyunları - iyi oynarsa elbet - birinci oyuncu kazanır. Öbür oyuncu nasıl oynarsa oynasın, birinci oyuncu hep kazanacak hamleyi bulur. Nasıl mı kazanır? İlk hamlesinde 2 taş

alır kümeden. Geriye 4 taş kalmıştır. Sıra ikinci oyuncuda. İkinci oyuncu 4 taşlık bir oyuna başlayacak ve yukarda gördüğümüz gibi oyunu kaybedecek.

Bu yazıda şu soruyu yanıtlayacağız: *Birinci oyuncu kaç taşlı oyunları kazanır?* Yani oyunda kaç taş olmalıdır ki, ikinci oyuncunun hamleleri ne olursa olsun, birinci oyuncu hep kazanacak hamleleri bulabilsin[1]?

Birinci Oyunun Stratejisi. Hemen yanıtı vereyim: Eğer kümedeki taş sayısı dörde bölünmüyorsa oyunu birinci oyuncu (iyi oynarsa elbet) kazanır. Eğer kümedeki taş sayısı dörde bölünüyorsa oyunu ikinci oyuncu (iyi oynarsa) kazanır. Örneğin 25, 26, 27 taşlık oyunları birinci oyuncu kazanır; 24, 28, 32 taşlık oyunlarıysa ikinci oyuncu kazanır.

Neden? Ve nasıl?

Kümede 1, 2 ya da 3 taş varsa, oyunu oyuna başlayan oyuncu kazanır: taşların hepsini birden alır; ortada taş kalmadığından ikinci oyuncu oynayamaz ve oyunu kaybeder.

Eğer kümede 4 taş varsa, oyuna başlayan oyuncu oyunu kaybedecektir. Çünkü birinci oyuncu öbür oyuncuya ya 1 ya 2 ya da 3 taşlık bir oyun sunmak zorundadır. Öbür oyuncu bütün taşları toplayıp kümede taş bırakmayabilir, yani oyunu kazanabilir.

Eğer kümede 5, 6 ya da 7 taş varsa, oyuna başlayan oyuncu oyunu kazanır. Çünkü bu oyuncu, gerektiği kadar taş alıp, oyunu 4 taşlık bir oyuna dönüştürebilir. Öbür oyuncu 4 taşlık bir oyunun birinci oyuncusu olmak zorunda ve yukarda gördüğümüz gibi oyunu kaybeder.

Eğer kümede 8 taş varsa, oyuna başlayan oyuncu oyunu 5, 6 ya da 7 taşlık bir oyuna dönüştürmek zorundadır. Öbür oyuncu bu 5, 6 ya da 7 taşlık oyunun birinci oyuncusu olacak

---

1 Bunun çok benzeri bir oyundan **Matematik ve Korku** adlı kitabımın *Matematik ve Korku* başlıklı bir yazımda sözetmiştim.

ve dolayısıyla - iyi oynayarak, yani 4 taş bırakarak - kazanacaktır. Demek ki 8 taşlı oyunu birinci oyuncu kaybeder.

Artık oyunu kimin ve nasıl kazanacağı belli olmuştur sanırım. Oyunda hep dörde bölünen bir sayıda taş bırakmaya çalışalım. Bunu başarabilirsek oyunu kazanırız. Örneğin 27 taşlı bir oyun oynuyorsak ve sıra bizdeyse 3 taş almalıyız. Eğer sıra bizde değilse, öbür oyuncunun hata yapmasını beklemekten başka çaremiz yok. Diyelim sıra bizdeydi ve 3 taş aldık. Öbür oyuncuya 24 taş kaldı. O oyuncu kaç taş alırsa alsın, sıra bize geldiğinde, oyunu 20 taşlık bir oyuna çevirmeliyiz. Bir sonraki oyunumuzda da oyunu 16 taşlık bir oyuna çevirmeliyiz. Böyle gide gide öbür oyuncu ya 12, 8, 4 ve 0 taşlık oyunlar kalır.

Eğer önünüze dörde bölünen sayıda taş gelmişse, 1 taş alın ki taş sayısı fazla azalmasın. Böylece öbür oyuncunun hata yapma olasılığını artırmış olursunuz.

Biraz Sohbet. Bu oyunu çözümlemek için, her hamleden sonra oyunun bir başka oyuna dönüştüğü olgusunu kullandık. Örneğin 27 taşlık bir oyun, bir sonraki hamlede 26, 25 ya da 24 taşlık bir oyuna dönüşur. Ama 27 taşlık oyunun birinci oyuncusu bir sonraki oyunun ikinci oyuncusu olacaktır.

Eğer A oyununu oynuyorsak ve sıra bizdeyse, yapabileceğimiz hamlelere bakalım. Diyelim yapabileceğimiz beş hamle var. Her hamlemizden sonra oyun bir başka oyuna dönüşecektir. Bu oyunlara B_1, B_2, B_3, B_4 ve B_5 oyunları diyelim. Öbür oyuncuya bu oyunlardan birini sunacağız ve öbür oyuncu kendisine sunulan bu oyunun birinci oyuncusu olacak. Eğer B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 oyunlarından birinde ikinci oyuncu kazanıyorsa, A oyununu kazanmak için, A oyununu bu oyuna dönüştürecek hamleyi yapmalıyız.

Yukardaki örnekte A, 27 taşlı oyun. Yapabileceğimiz üç hamle var: 1, 2 ya da 3 taş alabiliriz. B_1, B_2, B_3 sırasıyla 26, 25

ve 24 taşlı oyunları simgelesin. B_3 oyununda ikinci oyuncu kazandığından, 3 taş almalıyız.

Sihirbazlık kitaplarında yeni yetme sihirbazlara şu öğüt verilir: Bir sihirbazlığı iki kez üstüste aynı topluluk önünde yapmayın. "Buna çok benzer bir sihirbazlık daha biliyorum," deyip bir başka sihirbazlık gösterin. Yoksa foyanız ortaya çıkabilir.

Aynı öğüdü ben de vereceğim. Bu oyunu birkaç kez üstüste aynı kişiyle oynarsanız, öbür oyuncu bir süre sonra yönteminizi anlayabilir. Onun için oyunu değiştirin. Örneğin aşağıdaki oyunlardan birini önerin.

a. Aynı oyun, ama bu kez her oyuncu 1, 2, 3 ya da 4 taş alabilir.

b. Aynı oyun, ama bu kez her oyuncu 2, 3 ya da 4 taş alabilir. Bu oyunda 1 taş bırakan oyuncu oyunu kazanır, çünkü öbür oyuncunun yasal hamlesi kalmamıştır.

c. Aynı oyun, ama bu kez her oyuncu 1, 3 ya da 5 taş alabilir.

ç. Aynı oyun, ama bu kez her oyuncu 2, 4 ya da 6 taş alabilir.

d. Aynı oyun, ama bu kez her oyuncu 1, 2 ya da 4 taş alabilir.

e. Yukardaki oyunların "negatif"ini oynayın. Yani aynı oyunlar, ama en son taşı alan, yani son hamleyi yapan bu kez kaybediyor...

f. Bu kez taş ekleyelim. Başlangıçta yerde hiç taş olmasın. Her iki oyuncu da, sırası geldiğinde yere 1'den 10'a kadar dilediği kadar taş ekleyebilir. Örneğin yerdeki taş sayısını 100 yapan ilk oyuncu oyunu kazansın/kaybetsin...

g. Her oyunun bir de "şeytanın azabı" versiyonu vardır: Diyelim bir oyunda kazanan stratejiyi buldunuz. Aynı oyunu oynayın ama bu sefer kazanan stratejiyi yasaklayın. Örneğin f oyununda, 1, 12, 23, 34, ..., 89 diyen kazanır. Yeni oyunlarda bu sayıları söylemek yasaklansın.

Söylemeye gerek var mı? Bu oyunları kurbanınıza önermeden önce nasıl kazanacağınızı bulmalısınız.

İkinci Oyun. Yukardaki oyun basit geldiyse, kuralları biraz zorlaştıralım. Oyunu gene iki kişi arasında ve çakıl taşlarıyla oynatacağız. Oyuncular gene ortadaki kümeden 1, 2 ya da 3 taş çıkarabilecekler. Gene yapacak hamle bulamayan ilk oyuncu oyunu kaybedecek; yani son hamleyi yapan kazanacak.

Ancak bir kuralımız daha var bu kez. Oyuncular bir önceki oyuncunun aldığı taş kadar taş alamazlar yerden. Örneğin bir hamlenizde 2 taş almışsanız, bir sonraki hamlede öbür oyuncu 2 taş alamaz, 1 ya da 3 taş alabilir ancak. Oyuna başlayan oyuncunun böyle bir kısıtlaması yoktur elbet.

Bir önceki oyunda olduğu gibi, bütün taşları aldığımızda oyunu kazanırız. Ama, 1 taş alarak kümede 1 taş bıraktığımızda da oyunu kazanırız. Çünkü öbür oyuncu yerdeki o tek taşı alamaz. Oyunun kuralları bu hamleyi engelliyor.

Gene aynı soruyu soruyoruz: *Bu yeni oyunu hangi oyuncu nasıl oynayarak kazanır?* Yanıt oyunun başındaki taş sayısına göre değişebilir elbet.

İkinci Oyunun Stratejisi. Bu oyunun da yanıtı yukardaki yanıt gibi: Taş sayısı dörde bölünmüyorsa oyunu birinci oyuncu kazanır, taş sayısı dörde bölünüyorsa oyunu ikinci oyuncu kazanır! Ve şaşılacak şey, bu oyunun stratejisi de yukardaki oyunun stratejisi gibidir, hatta daha da kolaydır!

4 taşlı oyunu birinci oyuncu kaybeder. 1 taş alsa, ikinci oyuncu kalan 3 taşı alır. 3 taş alsa, ikinci oyuncu kalan taşı alır. 2 taş alsa, ikinci oyuncu 2 taş alamaz ama 1 taş alabilir ve hatta 1 taş almak zorundadır. Böylece birinci oyuncuya 1 taş kalır. Ama birinci oyuncu bu taşı alamaz, çünkü bir önceki hamlesinde ikinci oyuncu 1 taş almıştı. Birinci oyuncu oynayamadığından oyunu kaybeder.

Bu oyunda kazanmak için yukardaki stratejinin hemen hemen aynısını uygulamalıyız.

Diyelim 27 taşlı bir oyunda birinci oyuncuyuz. İlk oyundaki gibi 3 taş alalım ve öbür oyuncuya 24 taş bırakalım. Eğer öbür oyuncu 1 taş alırsa 3 taş alalım ve oyunu 20 taşa indirgeyelim. Eğer öbür oyuncu 3 taş alırsa 1 taş alalım ve oyunu gene 20 taşa indirgeyelim. Peki, ya öbür oyuncu 2 taş alıp oyunu 22 taşa indirgerse ne yapmalıyız? Yukardaki oyunu oynasaydık, biz de 2 taş alıp oyunu 20 taşa indirgerdik. Ne yazık ki 2 taş almaya kurallar izin vermiyor. Ya 1 ya 3 taş alacağız. Ne yapmalıyız? 1 taş mı almalıyız 3 taş mı?

Kaç taş alırsak alalım, önemli değil. Çünkü ne oynarsak oynayalım, öbür oyuncu bize dörde bölünen sayıda taş bırakamaz: Diyelim 1 taş aldık ve geriye 21 taş kaldı. Öbür oyuncu 1 taş alamayacağından oyunu 20 taşa indirgeyemez. Diyelim 3 taş alıp oyunu 19 taşa indirgedik. Öbür oyuncu 3 taş alamayacağından oyunu 16 taşa indirgeyemez.

Eğer bu yöntemi uygularsak, her zaman dörde bölünen sayıda taş bırakamayabiliriz ama öbür oyuncunun bize dörde bölünen sayıda taş bırakmasını engelleriz. Böylece hiçbir zaman dörde bölünen sayıda taş gelmez önümüze. Dolayısıyla hiçbir zaman 0 taşlı bir oyun devralmayız (0 dörde bölünür!) ve taş yokluğundan oyunu kaybedemeyiz.

Peki, bu stratejiyle oynayarak, önümüze tek taş gelip de bu taşı alamadığımızdan oyunu kaybettiğimiz olur mu? Olmaz. Neden olmaz? Çünkü önümüze 1 taş gelmişse ve bu taşı alamıyorsak, bir önceki hamlede öbür oyuncu kümeden 1 taş almış demektir. Demek ki bu oyuncuya 2 taşlı bir oyun devretmişizdir. Öbür oyuncu bu 2 taşı alabilseydi alırdı. Almadığına göre bir önceki hamlemizde 2 taş almışızdır. Demek ki bir önceki oyunda önümüzde 4 taş varmış. Yani, önümüze 4 taşlı bir oyun sunulmuş bir an! Ama önümüze dörde bölünen sayıda taş bırakılamayacağını biraz önce kanıtlamıştık. Demek ki böyle de

kaybedemeyiz. Demek ki hiçbir türlü kaybedemeyiz. Demek ki bu stratejiyle oyunu kazanırız.

Sonuç olarak hep dörde bölünen sayıda taş bırakmalıyız. Oyunun kuralları bunu engelliyorsa, ne yaparsak yapalım önemli değildir.

Bu son dediğim pek doğru değil... Eğer önümüze gelen oyunun taş sayısı dörde bölünüyorsa, 2 taş almayalım. Çünkü 2 taş alırsak, öbür oyuncunun yanlış yapmasına olanak yoktur. Ya 1 ya 3 taş alalım.

Bir önceki oyunun yöntemini öbür oyuncu bir iki kez oynadıktan sonra kolayca anlayabilir. Bu oyunun yöntemini öbür oyuncunun anlaması daha zordur. Çünkü oyunun kimi aşamalarında ister 1 ister 3 taş alabiliriz. Kimileyin 1, kimileyin 3 taş alarak yöntemimizi uzun zaman öbür oyuncudan gizleyebiliriz.

Doğru Yanıtı Nasıl Buldum? Bu yazıyı az kalsın burda kesecektim. Biraz düşününce, bu yazıyı burda kesmenin yalan söylemek olacağını anladım. Çünkü doğru stratejiyi nasıl bulduğumdan, geçtiğim süreçlerden sözetmedim.

Yukardaki oyunda hangi oyuncunun nasıl oynarsa kazanacağını nasıl buldum? Okur, anlattığımı hemen bulduğumu sanıyorsa yanılıyor. Tereyağından kıl çeker gibi olmadı. Geçtiğim aşamaları teker teker yazayım:

1. Önce oldukça uzun süren hesaplar yaparak oyunu kimin ve hangi stratejiyle oynayarak kazanacağını buldum. Ama bulduğum strateji yukardaki gibi yalın değildi. Doğru olmasına doğruydu ama karmaşık bir biçimde ifade edilmişti. Stratejinin doğru strateji olduğunun kanıtı da oldukça karmaşıktı. Hiç de güzel bir kanıt değildi. Hatta öylesine çirkindi ki, bir ara bu yazıyı yazmaktan vazgeçmiştim.

2. Bulduğum stratejiyi birkaç kez gözden geçirince stratejiyi daha yalın bir biçimde ifade edebileceğimi gördüm.

3. Bu yalın ifadeyi gene yalın bir biçimde kanıtlamaya çalıştım. Bu pek zor olmadı ve yukardaki kanıtı buldum.

Yazımın yukardaki bölümünde 2 ve 3 sayılı aşamaların sonuçlarını okudunuz. Birinci aşamayı sizden gizledim. Yani sonucu bulmak için çektiğim güçlükleri göstermedim. Yazının bundan sonraki bölümünde o ilk aşamayı anlatacağım.

Ancak ilk aşamayı anlatmadan önce şunu söylemeliyim: Birinci aşamayı atlayıp doğrudan ikinci aşamaya geçebilen matematikçiler, hatta öğrenciler vardır. Ama böyle insanlar azınlıktadır. Genellikle matematikçilerin ilk çözümleri oldukça karmaşıktır. Matematikçiler buldukları ilk çözümü açıklamazlar. Nasıl bir ressam tablosuyla birlikte tablosunun eskizlerini sergilemezse, bir matematikçi de kanıtladığı teoremle birlikte önüne çıkan zorlukları sergilemez. Teoremin en kısa, en özlü, en yalın ve en güzel kanıtını açıklamakla yetinir. Bu kuralı bu yazımda bozarak, yazının süreğinde doğru yanıtı bulmak için geçtiğim evreleri açıklayacağım. Kendimi yinelememek için, yukardaki oyuna benzer bir oyun ele alacağım. Hep birlikte doğru stratejiyi ve bu stratejinin neden doğru olduğunu bulacağız.

Üçüncü Oyun. Bu oyun da yukardaki oyun gibi, ancak iki oyuncunun peşpeşe aldıkları taş sayısının toplamı 4 olamaz. Yani bir oyuncu 1 taş almışsa sonraki oyuncu 3 taş alamaz, 2 taş almışsa sonraki oyuncu 2 taş alamaz, 3 taş almışsa sonraki oyuncu 1 taş alamaz. Hamle yapamayan oyunu kaybediyor. Oyunu hangi oyuncu nasıl oynayarak kazanır?

Üçüncü Oyunun Stratejisi. Doğru yanıtı hemen vermeyeceğim. Türlü güçlüklerden geçtikten sonra hep birlikte bulacağız.

Başlangıçta n taş olan oyunlara A_n oyunu diyelim. A_n oyununu kimin nasıl oynayarak kazandığını bulmaya çalışıyoruz.

Eğer n küçük bir sayıysa, yani oyunumuzda az taş varsa, yanıtı bulmak zor değil. Örneğin, A_1, A_2, A_3 oyunlarını birinci

oyuncu bütün taşları alarak kazanır. A_4 oyununu da birinci oyuncu bir hamlede kazanır, hem de ne oynarsa oynasın kazanır. Öte yandan A_5 oyununu ikinci oyuncu kazanır.

A_n oyununa başlayan oyuncuya Bülent diyelim. A_n oyununun ikinci oyuncusuna da İhsan diyelim. (Bülent'in B'si "birinci oyuncu"nun B'si, İhsan'ıun İ'si "ikinci oyuncu"nun İ'si.) Demek ki A_1, A_2, A_3, A_4 oyunlarını Bülent kazanır. A_5 oyununuysa İhsan kazanır.

Her oyunun bir değeri olsun. Eğer Bülent'in kazanan bir stratejisi varsa oyunun değeri 1 olsun. Bülent'in kazanan bir stratejisi yoksa, yani İhsan'ın kazanan bir stratejisi varsa[2] oyunun değeri 0 olsun. Bu tanıma göre, A_1, A_2, A_3 ve A_4 oyunlarının değeri 1'dir. Öte yandan A_5 oyununun değeri 0'dır. A_n oyununun değerini a_n'yle simgeleyelim. Dolayısıyla,

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 1$$
$$a_3 = 1$$
$$a_4 = 1$$
$$a_5 = 0$$

eşitlikleri doğrudur. a_n sayılarını bulacağız. Bu değerleri bulduğumuzda strateji hemen hemen kendiliğinden belli olacak.

Yukarda, her oyunun, her hamleden sonra bir başka oyuna dönüştüğünü söylemiştik. A_n oyunu ilk hamleden sonra hangi oyuna dönüşür? Diyelim A_{27} oyununda Bülent 1 taş aldı. Şimdi oyunda 26 taş var. Ama bu yeni oyun A_{26} oyunu değildir. Çünkü A_{26} oyununun birinci hamlesinde 3 taş alınabilir, oysa A_{27}'nin yolaçtığı yeni oyunun ilk hamlesinde 3 taş alınamaz. Bu yeni oyuna $B_{26,1}$ diyelim. $B_{26,1}$ oyunu A_{26} oyunu gibi, aralarındaki tek ayrım $B_{26,1}$ oyununda birinci oyuncunun 3 taş alamayacağı kuralı.

---

2 İki oyuncudan birinin kazanan bir stratejisi olduğu *Nim* başlıklı yazımda kanıtlanmıştır. (Bkz. Matematik ve Korku)

A_{27} oyununda, Bülent 1 taş alırsa oyunun $B_{26,1}$ oyununa dönüştüğünü söyledik. Bülent 2 taş aldığında ortaya çıkan yeni oyuna $B_{25,2}$ diyelim. Ve Bülent 3 taş aldığında ortaya çıkan oyuna $B_{24,3}$ diyelim. Görüldüğü gibi, ilk sayı oyundaki taş sayısını, ikinci sayıysa o oyuna kaç taş alınarak gelindiğini belirtiyor.

Genel olarak, A_n oyununda Bülent 1, 2 ve 3 taş alıp İhsan'a sunduğu oyunlara sırasıyla,

$$B_{n-1,1},\ B_{n-2,2} \text{ ve } B_{n-3,3}$$

diyelim. $B_{n,1}$ oyunuyla A_n oyunu arasındaki tek ayrım, $B_{n,1}$ oyununda birinci oyuncunun birinci hamlesinde 3 taş almasını yasaklayan kural.

$B_{n,1}$ oyununda ilk oyuncu 2 taş alırsa, oyun $B_{n-2,2}$ oyununa dönüşür elbet.

A_n oyununu Bülent nasıl kazanabilir? Eğer İhsan'a sunacağı

$$B_{n-1,1},\ B_{n-2,2},\ B_{n-3,3}$$

oyunlarından birinde ikinci oyuncu kazanıyorsa kazanır, yoksa kaybeder. Örneğin $B_{n-2,2}$ oyununu ikinci oyuncu kazanıyorsa, Bülent, 2 taş alarak A_n oyununu $B_{n-2,2}$ oyununa dönüştürür. Dolayısıyla A_n oyununun değerini (yani a_n sayısını) bulmak için $B_{n-1,1}$, $B_{n-2,2}$ ve $B_{n-3,3}$ oyunlarının değerlerini bulmak gerekir. Bu değerlere sırasıyla $b_{n-1,1}$, $b_{n-2,2}$, $b_{n-3,3}$ diyelim. Eğer $B_{n-1,1}$ oyununu birinci oyuncu kazanıyorsa, $b_{n-1,1} = 1$'dir, yoksa $b_{n-1,1} = 0$'dır.

$b_{n,1}$, $b_{n,2}$ ve $b_{n,3}$ sayılarını küçük n'ler için hesaplamak zor değildir. Örneğin $b_{2,2} = 0$'dır, çünkü ortada 2 taş vardır ve birinci oyuncu 2 taş alamaz, 1 taş almak zorundadır. İkinci oyuncu kalan taşı alarak oyunu kazanır.

$n = 1, 2, 3$ için bu sayıları bulalım:

n	$b_{n,1}$	$b_{n,2}$	$b_{n,3}$	a_n
1	1	1	0	1
2	1	0	1	1
3	0	1	1	1

$n > 3$ ise bu sayıları nasıl bulabiliriz?

$B_{n,1}$ oyununun $B_{n-1,1}$ ve $B_{n-2,2}$ oyunlarından birine dönüşeceğini biliyoruz. ($B_{n-3,3}$ oyununa dönüşemez.) Dolayısıyla bu iki oyundan birinde birinci oyuncu kaybediyorsa, $B_{n,1}$ oyununu birinci oyuncu kazanır. Yani $b_{n,1}$'in 1 olması için gerekli ve yeterli koşul, $b_{n-1,1}$ ve $b_{n-2,2}$ sayılarından birinin 0 olmasıdır. Bunu cebirsel olarak ifade edersek,

$$b_{n,1} = 1 - b_{n-1,1}b_{n-2,2}$$

eşitliğini buluruz. $b_{n,2}$, $b_{n,3}$ ve a_n için de buna benzer eşitlikler bulmak pek zor değildir.

$$\begin{aligned} b_{n,1} &= 1 - b_{n-1,1}b_{n-2,2} \\ b_{n,2} &= 1 - b_{n-1,1}b_{n-3,3} \\ b_{n,3} &= 1 - b_{n-2,2}b_{n-3,3} \\ a_n &= 1 - b_{n-1,1}b_{n-2,2}b_{n-3,3}. \end{aligned}$$

Şimdi yukardaki tabloyu $n > 3$ için sürdürebiliriz. Örneğin,

$$b_{4,1} = 1 - b_{3,1}b_{2,2} = 1$$

eşitliğini bulabiliriz. İşte tablonun ilk onbeş sırası:

n	$b_{n,1}$	$b_{n,2}$	$b_{n,3}$	a_n
1	1	1	0	1
2	1	0	1	1
3	0	1	1	1
4	1	1	1	1
5	0	0	0	0
6	1	1	0	1
7	1	0	1	1
8	0	1	1	1
9	1	1	1	1
10	0	0	0	0
11	1	1	0	1
12	1	0	1	1
13	0	1	1	1
14	1	1	1	1
15	0	0	0	0

Tabloyu daha fazla sürdürmeye gerek yok, çünkü kolayca görülebileceği gibi ilk beş sırayla ikinci beş ve üçüncü beş sıralar birbirlerinin aynısı. Tablo böylece sonsuza değin sürer.

Yukardaki tablodan da kolayca anlaşılacağı gibi, eğer n beşe bölünmezse $a_n = 1$, bölünürse $a_n = 0$'dır. Yani eğer taş sayısı beşe bölünmüyorsa oyunu Bülent kazanır, bölünüyorsa İhsan.

Şimdi sıra stratejiyi bulmaya geldi.

Diyelim 13 taşlı bir oyunun, yani A_{13}'ün birinci oyuncusuyuz, yani Bülent'iz. $a_{13} = 1$ olduğundan, oyunu iyi oynayarak kazanabileceğimizi biliyoruz. Nasıl oynayarak kazanabiliriz? Bu oyunu $B_{12,1}$, $B_{11,2}$, $B_{10,3}$ oyunlarından birine dönüştürebiliriz. Hangisine dönüştürmeliyiz? Bu üç oyunun değerlerine, yani $b_{12,1}$, $b_{11,2}$, $b_{10,3}$ sayılarına bakalım. Bu sayılardan hangisi 0'dır? Yalnızca $b_{10,3}$ sayısı 0. Dolayısıyla 3 taş alıp oyunu $B_{10,3}$ oyununa dönüştürelim. Sıra ikinci oyuncuda, yani İhsan'da. İkinci oyuncu ne oynarsa oynasın, oyunu kazanabileceğimizi biliyoruz. Diyelim ikinci oyuncu 1 taş alarak oyunu $B_{9,1}$ oyununa dönüştürdü. Biz şimdi ya 2 ya 3 taş alabiliriz. 2 taş alırsak oyunu $B_{7,2}$'ye, 3 taş alırsak $B_{6,3}$'e dönüştürürüz. Bu oyunların değerleri olan $b_{7,2}$ ve $b_{6,3}$ sayılarına bakalım. Bu iki sayıdan hangisi 0'dır? Her ikisi de. Demek ki ister 2 taş alabiliriz, ister 3. Her iki durumda da oyunu iyi oynayarak kazanırız. Oyunu böyle oynarsak sonunda kazanırız.

Sanırım strateji belli olmuştur. Stratejimizi matematiksel olarak ifade edelim. Bunun için yukardaki tablonun birkaç satırını genelleşmiş olarak yazalım:

n	$b_{n,1}$	$b_{n,2}$	$b_{n,3}$	a_n
$5k-2$	0	1	1	1
$5k-1$	1	1	1	1
$5k$	0	0	0	0
$5k+1$	1	1	0	1
$5k+2$	1	0	1	1
$5k+3$	0	1	1	1
$5k+4$	1	1	1	1

Eğer önümüzde $5k$ taşlı bir oyun varsa ve oynama sırası bizdeyse, ne oynarsak oynayalım, öbür oyuncu iyi oynarsa kaybedeceğimizi biliyoruz. Bu durumda kazanan bir strateji yoktur.

Diyelim önümüzde $5k + 1$'lik bir oyun var. Eğer $B_{5k+1,1}$ oyunundaysak 1 taş almalıyız. Eğer $B_{5k+1,2}$ oyunundaysak gene 1 taş almalıyız. Her iki durumda da oyunu $5k$'lık bir oyuna dönüştürdük. Eğer $B_{5k+1,3}$ oyunundaysak oyunu öbür oyuncu iyi oynayarak kazanabilir. Dolayısıyla bu durumda kazanan strateji yoktur.

Okur, $5k + 2$ ve $5k + 3$'lük oyunlara bakarsa, bu oyunlarda da $5k$ taş bırakması gerektiğini anlayacaktır.

$5k + 4$ taşlı oyunlarda istediğimizi oynayabiliriz! Ne oynarsak oynayalım oyunu kazanabiliriz.

Görüldüğü gibi öbür oyuncuya hep beşe bölünen sayıda taş bırakmalıyız. Eğer beşe bölünen sayıda taş bırakamıyorsak, ne yaptığımız önemli değildir pek.

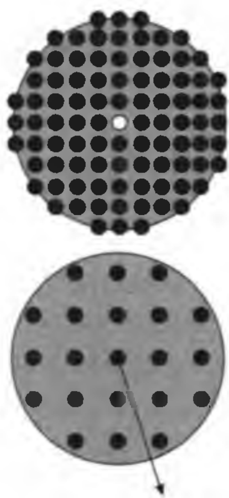
Önünüze gelen oyunun taş sayısı beşe bölünüyorsa, tek umudunuz öbür oyuncunun bir yanlış yapması. Öbür oyuncunun yanlış yapmasına olanak tanımak için 1 taş almayın, çün-

kü 1 taş alırsanız, öbür oyuncunun her hamlesi doğru hamle olacaktır. Bu durumda ya 2 ya 3 taş alın. Alabilirseniz 2 taş alın ki oyundaki taş sayısı çok azalmasın ve öbür oyuncunun yanlış yapma olasılığı artsın.

Bu aşamadan sonra bu stratejinin neden doğru olduğunu yalın bir biçimde açıklamak gerekiyor. Bunu okura bırakıyorum.

Bahçe Sorusu[1]

1. Giriş. Daire biçiminde bir bahçeye, merkezden başlayarak, birer metre aralıklarla yatay ve dikey sıralanmış fidan dikmeyi düşünüyoruz.



Bahçenin merkezine fidan dikmeyeceğiz. Soru şu: Bahçenin merkezinden baktığımızda bahçenin dışındaki herhangi bir noktayı görebilir miyiz?

Yanıt, bahçenin büyüklüğüne ve fidanların kalınlığına göre değişir elbet. Eğer bahçe küçükse ve fidanlar inceyse, merkezden belli bir yöne bakarak bahçenin dışındaki bir noktayı görebiliriz. Ama ilk şekildeki gibi bahçe büyükse ve fidanlar kalınsa, fidanlar bahçenin dışım görmemizi engeller.

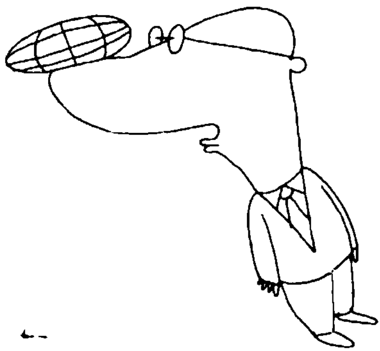
O zaman sorumuzu biraz daha belirleyelim. Bahçemizin yarıçapı 50 metre olsun. Fidanlarımızın da yarıçapı 2 santimetreden biraz büyük olsun, diyelim 2,01 santimetre. Bu ölçülerle, bahçenin merkezinden bakıldığında bahçenin dışı görülür mü?

---

1 Bu yazı, Kaynakça [8]'deki bir yazıdan uyarlanmıştır. İngilizce bilen okurlara bu harika popüler matematik kitabını öneririm.

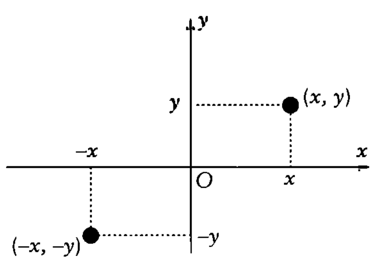
Fidanlar her metreye dikileceğinden fidanların yarıçapı oldukça küçük sayılır. Bu yüzden bahçenin dışının görüleceği sanılabilir. Bunun doğru olmadığını göreceğiz (fidanlar küçük ama bahçe büyük!)

Bu somut problemin yanıtı soyut problemlerin yanıtını gerektirecek. **Geometrik Sayılar Kuramı** adı verilen konuda bir iki teorem kanıtlayacağız. Geometrik Sayılar Kuramı, adından da anlaşılacağı üzere, hem geometriyi hem de sayıları ilgilendiren çok güzel bir konudur. On dokuzuncu yüzyılda, Hermann Minkowski (1864-1909) adlı Litvanyalı matematikçi tarafından geliştirilmiştir ilk olarak. Yani oldukça yeni bir konu sayılır.



2. Önbilgi. Teoremlerimizi kanıtlamak için okurun pek yabancı olmadığını sandığım birkaç tanım ve olguya gereksiniyoruz.

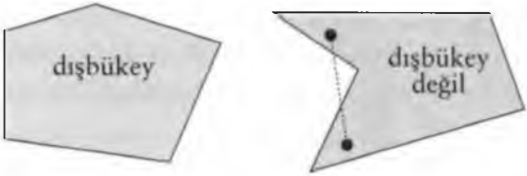
2.1. Eksenleri çizilmiş bir düzlemde herhangi bir (x, y) noktası alalım. Bu noktanın merkeze göre simetriğinin koordinatları, yandaki şekilden de anlaşılacağı üzere $(-x, -y)$'dir.



Merkezdeki (0, 0) noktasına O noktası diyeceğiz.

2.2. Düzlemde bir bölge alalım. Eğer bu bölgenin her iki noktası arasındaki doğru parçası düzlemin içine düşüyorsa, bölgeye ***dışbükey*** adı verilir. Örneğin yan sayfada soldaki bölge dışbükeydir. Sağdakiyse dışbükey değildir. Çünkü sağdaki şekilde, sol üst ve sol alttan iki nokta alırsak, bu noktalar ara-

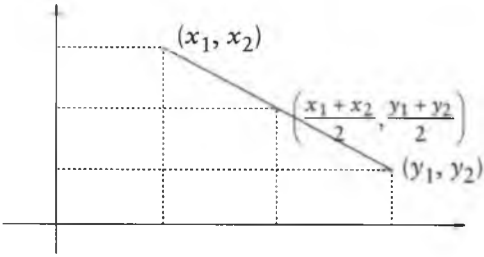
sındaki doğru parçası bölgenin dışına taşar.



2.3. Düzlemde iki (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) noktası alalım. Bu iki noktanın tam ortasındaki nokta

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

noktasıdır:

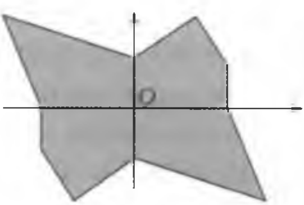


Eğer (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) noktaları dışbükey bir bölgedeyse, bu iki noktanın ortasındaki

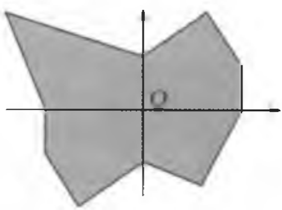
$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

noktası da aynı bölgededir.

2.4. Gene düzlemde bir bölge alalım. Eğer, bölgedeki her (x, y) noktası için, $(-x, -y)$ noktası da bölgedeyse, bölgeye ***O'ya göre simetrik*** denir. Örneğin aşağıdaki şekildeki soldaki bölge O'ya göre simetriktir, ama sağdaki değildir.

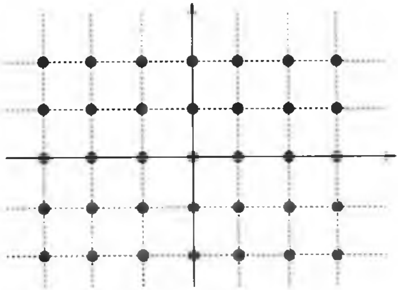


O'ya göre simetrik



O'ya göre simetrik değil

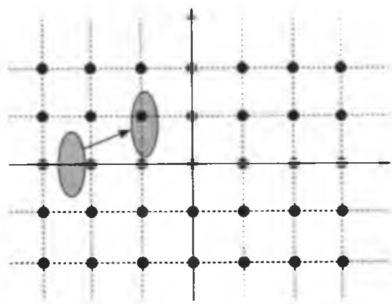
2.5. Koordinatları tam sayı olan noktalara ***tamnokta*** adını vereceğiz. Örneğin, (0, 0), (3, 5), (–2, 4), (3, 0) noktaları tamnoktalardır. (1/2, 7) noktası bir tamnokta değildir. Birkaç tamnokta gösterelim (Tamnoktalar, doğruların kesişim noktalarıdır):



Fidanlarımızı bahçenin tamnoktalarına dikeceğimize okurun dikkatini çekeriz.

Artık geometrik sayılar kuramının ilgilendiği sorulara geçebiliriz.

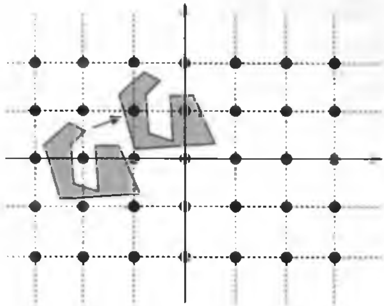
3. Blichfeldt Önsavı. Düzlemde bir bölge ele alalım. Eğer bölgenin alanı 0'dan büyükse, bu bölgeyi sağa, sola, yukarı, aşağı, belli bir yöne doğru öteleyerek (döndürme yok, tek yasal hamle öteleme), bölgeyi içine bir tamnokta gelebilecek bir konuma getirebiliriz.



Bu kolaydı. Peki, yine aynı yöntemle, yani öteleyerek, bölgemizin içine iki tamnokta sokabilir miyiz?

Eğer bölgenin alanı küçükse, nereye ötelersek öteleyelim içine iki tane tamnokta girecek bir konuma getiremeyiz elbet. Örneğin, eğer bölgemiz küçücük bir daireyse, diyelim 1/4 yarıçaplı, o zaman bölgeyi nereye ötelersek öteleyelim içine iki tane tamnokta düşüremeyiz.

Peki, belli bir yöne doğru öteleyerek içine iki tane tamnokta düşürebilmemiz için bölgenin alanı en az kaç olmalıdır? Eğer bölgenin alanı 1'den büyükse bölgeyi öteleyerek içine iki tamnokta sokabiliriz. Birazdan bunu kanıtlayacağız. Bölgenin biçimi ne olursa olsun... Yeter ki alanı 1'den büyük olsun...

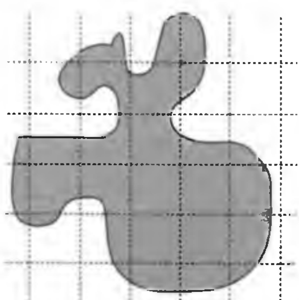


Şimdi daha zor bir soru soralım. Bölgenin içine (her zamanki gibi öteleyerek) üç tamnokta sokabilmemiz için, bölgenin alanı en az kaç olmalıdır? Eğer alan 2'den büyükse, bölgeyi belli bir yöne doğru öteleyerek, bölgenin içine en az üç tane tamnokta sokabileceğimizi kanıtlayacağız birazdan. Bölgenin biçimi ne olursa olsun... İster yuvarlak, ister kare, ister upuzun bir dikdörtgen, ister yılan gibi kıvır kıvır olsun... Yeter ki alanı 2'den büyük olsun.

Genel olarak, eğer bölgemizin alanı n'den büyükse, öteleyerek (döndürmeye gerek yok) içine $n + 1$ tane tamnokta girecek konuma getirebiliriz. Bu, şimdilik bir sanı. Matematiksel kesinlikle kanıtlayamadığımız sürece de bir sanı olarak kalacak. Blichfeldt adlı bir Amerikan matematikçi bu sanıyı kanıtlamış.

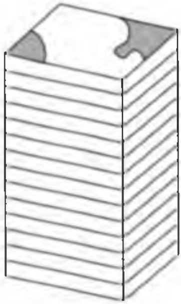
Blichfeldt Önsavı: *Alanı n'den büyük olan bir bölgeyi, içine* $n + 1$ *tane tamnokta girecek biçimde öteleyebiliriz.*

Kanıt: İlk olarak tamnoktalardan geçen yatay ve dikey doğruları çizelim. Sonra da bölgemizi boyayalım.



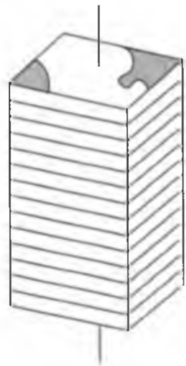
Boya değmiş kareleri keselim ve bu kareleri **döndürmeden** üstüste yığalım.

Kareleri üstüste yığarken kareleri döndürmemeye özellikle dikkat edelim. Yani kareleri yerlerinden kaldırıp üs-



tüste yığarken karelerin yönünü de değiştirmeyelim. Üstüste konmuş bir yığın kare elde ettik. Her karenin bir bölümü boyanmış, bir bölümü boyanmamış. Boyanmış bölümlerin toplam alanının n'den büyük olduğunu biliyoruz, çünkü bölgemizin alanı n'den büyüktü.

Bu kare yığınını yukardan aşağıya doğru bir tığla delelim.



Bu tığ her kareyi bir noktadan delecek. Tığın herhangi bir kareyi deldiği nokta boyanmış da olabilir, boyanmamış da. Tığ kaç boyanmış noktadan geçebilir? Hiçbir boyanmış noktadan geçmeyebilir, bir tek boyanmış noktadan geçebilir, iki boyanmış noktadan geçebilir... Tığı soktuğumuz yere göre değişir bu sayı.

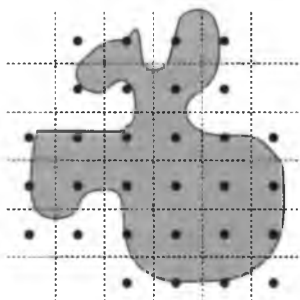
Bir sav ortaya atıyoruz: *Tığı öyle bir yerden geçirebiliriz ki, tığ en az $n + 1$ tane boyalı nokta deler.*

Kanıtlamamız gerek bu savımı. Kanıtlayalım. Diyelim savımız yanlış. Yani diyelim ki, tığ nerden geçirilirse geçirilsin, en

fazla n tane boyalı nokta deler. Bu varsayımdan bir saçmalık, bir çelişki çıkaracağız ve böylece savımızı kanıtlamış olacağız. En alttaki kareyi ele alalım. Öbür karelerin boyalarının bu en alttaki karenin üstüne kat kat sürülmüş olduğunu varsayalım bir an. Örneğin, en alttaki karenin bir noktasının üstünde 6 tane boyalı nokta varsa, o en alttaki noktanın 6 kat boyanmış olduğunu varsayalım. Böylece en alttaki karenin her noktasını üstüne birkaç kat boya çekilmiş bir nokta olarak görebiliriz. Üstüste en fazla n tane boyalı nokta olduğunu varsaydığımızdan, en alttaki karenin her noktasına en fazla n kat boya çekilmiş olduğu anlaşılır. En alttaki karenin alanı 1 olduğundan ve her noktaya en fazla n kat boya çekildiğinden, toplam sürülen boya alanının en fazla n olduğu çıkar. Oysa boyalı alanımız n'den büyüktü. Bir çelişki elde ettik ve savımız kanıtlanmış oldu.

Blichfeldt'in önsavının kanıtına geri dönelim.

Şimdi tığımızı en az $n + 1$ boyalı noktayı delecek biçimde geçirelim. Tığımız her karede bir delik açacak. Bu açılan deliklerin en az $n + 1$ tanesi boyalı noktalardan oluşuyor. Şimdi karelerimizi eski yerlerine yerleştirelim. Kareleri döndürmediğimizden, eski şekli yeniden elde ettik, aradaki tek ayrım, karelerde bulunan delikler:



Bu deliklerin yerlerine dikkat ederseniz, aynen tamnoktalar gibi yerleştirildiklerini görürsünüz. Şimdi bölgemizi, bu deliklerden herhangi birinin herhangi bir tamnokta üzerine gelecek

biçimde ötelersek, bölgemizin içine en az $n + 1$ tane tamnokta girdiğini görürüz.

Böylece Blichfeldt Önsavı'nı kanıtlamış olduk.

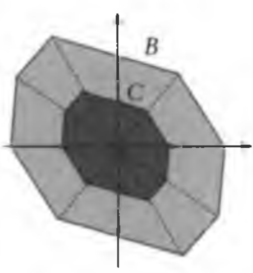
4. Bir Sonuç. Aslında bize gereken yukarda kanıtladığımız önsavın yalnızca özel bir durumu. Yukardaki önsavda n'yi 1 olarak alırsak, alanı 1'den büyük olan bir bölgeyi öteleyerek içine iki tamnokta girebilecek konuma getirebileceğimiz anlaşılır. Bundan da şu sonuç çıkar:

Önsav. *Alanı 1'den büyük bir bölgenin içinde, koordinatlarının farkı da tamsayı olan en az iki nokta vardır. Yani bölgenin içinde öyle (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) noktaları vardır ki, $x_2 - x_1$ ve $y_2 - y_1$ birer tamsayıdır.*

5. Minkowski'nin Teoremi. Sıra Minkowski'nin ünlü teoremini kanıtlamaya geldi. Görüldüğü gibi bahçe problemini çözmek pek kolay değil, zaman alıyor.

Minkowski Teoremi. *Alanı 4'ten büyük ve $(0, 0)$'a göre simetrik olan dışbükey bir bölgede $(0, 0)$'dan başka bir tamnokta daha vardır.*

Kanıt: Bölgemize B adını verelim. B bölgesini 1/2 ölçütünde merkeze doğru küçültelim. Elde ettiğimiz bu yeni bölgeye C adını verelim. Solda B'yle C'nin temsili resimlerini bulacaksınız.



B'yle C'nin alanları arasında nasıl bir ilişki vardır? Eğer B bir dikdörtgen olsaydı, C, B'nin boyutlarının yarısı kadar bir dikdörtgen olurdu, dolayısıyla C'nin alanı B'nin alanının dörtte biri olurdu. Eğer B bir üçgen olsaydı, gene aynı nedenden C'nin alanı B'nin alanının dörtte biri olurdu. Genel olarak,

B'nin şekli ne olursa olsun, C'nin alanı B'nin alanının dörtte biridir. B'nin alanının 4'ten büyük olduğunu biliyoruz. Demek ki C'nin alanı 1'den büyüktür. Dolayısıyla C'ye Blichfeldt'in önsavının sonucunu uygulayabiliriz: C'de öyle (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) noktaları vardır ki, $x_2 - x_1$ ve $y_2 - y_1$ birer tamsayıdır.

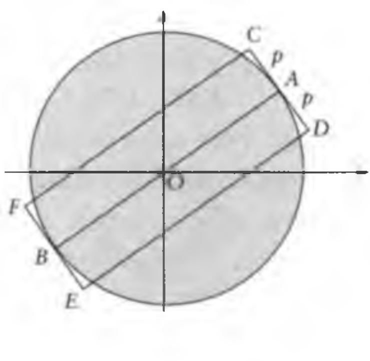
B bölgesi O'ya göre simetrik olduğundan, C de O'ya göre simetriktir. Dolayısıyla $(-x_2, -y_2)$ noktası da C'dedir.

B dışbükey olduğundan C de dışbükeydir. Demek ki, C'de bulunduğunu bildiğimiz (x_1, y_1) ve $(-x_2, -y_2)$ noktalarının tam ortası olan

$$\left(\frac{x_1 - x_2}{2}, \frac{y_1 - y_2}{2}\right)$$

noktası da C'dedir. C'nin bu noktasına B'de $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ noktası tekabül eder. $x_2 - x_1$ ve $y_2 - y_1$ tamsayı olduklarından bu son nokta bir tamnoktadır. Bulduğumuz bu tamnokta $(0, 0)$ noktasından, yani merkezden farklıdır. Sonuç olarak B'de merkezden farklı bir tamnokta bulduk: $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ noktası. Minkowski'nin ünlü teoremi de böylece kanıtlanmış oldu. (Tabii, eğer B'de merkezden farklı bir tamnokta varsa, B'de üçüncü bir tamnokta daha vardır.)

6. Bahçe Probleminin Çözümü. Şimdi artık bahçe problemine saldırabiliriz. Bahçemiz 50 metre yarıçaplı bir daire. Bahçenin merkezine O diyelim (Yandaki şekle bakın.) Her fidanın yarıçapı 2 santimetreden, yani 1/50 metreden daha büyük. En küçük fidanın çapına r diyelim. Metreyle ifade edersek,



$$r > 1/50$$

eşitsizliğini elde ederiz. Öte yandan

$$r < 1$$

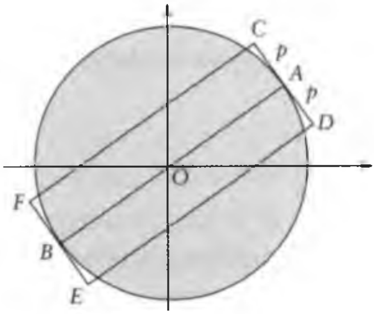
çünkü fidanların çapları 1 metreden büyük olamaz (yoksa fidanlar birbirlerine toslarlar.) Şimdi p,

$$1/50 < p < r$$

eşitsizliklerini sağlayan herhangi bir sayı olsun[2]. Özet olarak,

$$1/50 < p < r < 1$$

eşitsizlikleri geçerli. Bu eşitsizlikleri aklımızda tutalım, birazdan gerekecekler.



Bahçenin sınırında herhangi bir A noktası alalım. Merkezden bakıldığında bu A noktasının görünmediğini kanıtlayacağım. Böylece problemimizi çözmüş olacağız.

B noktası, OA doğrusuyla bahçemizin sınırının kesiştiği öbür nokta olsun. A ve B noktalarından bahçemize birer teğet çıkalım. Ve bu teğetlerin üstünde bu noktalardan p uzaklıkta C, D, E ve F noktaları alalım.

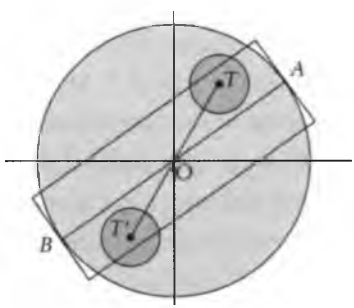
$CDEF$ dikdörtgenine bakalım. Bu dikdörtgenin boyu bahçenin çapına, yani 100'e eşit. Eniyse $2p$'ye eşit. Demek ki $CDEF$ dikdörtgeninin alanı

$$100 \times 2p = 200p$$

dir. Ama $p > 1/50$. Demek ki $CDEF$ dikdörtgeninin alanı

$$200 \times 1/50$$

den yani 4'ten daha büyük. $CDEF$ dikdörtgeni dışbükey olduğundan ve O'ya göre simetrik olduğundan, biraz önce kanıtladığımız Minkowski'nin teoremine göre, bu dikdörtgenin içinde O'dan başka bir tamnokta daha vardır. Bu



2 p'yi $(r + 1/50)/2$ olarak alabiliriz dilersek.

tamnoktaya T adını verelim. T'nin O'ya göre simetriği de bir tamnoktadır; bu tamnoktaya da T' adını verelim.

T noktası bahçenin içinde olabilir de olmayabilir de. Önce T'nin bahçenin içinde olduğunu varsayalım. T bahçedeyse, T' noktası da bahçededir. Bu iki tamnoktaya birer fidan dikilecek.

$CDEF$'nin eni $2p$ olduğundan ve her fidanın çapı p'den daha büyük olduğundan, yandaki şekilden de anlaşılacağı üzere, T ve T' noktalarına dikilen fidan A ve B noktalarının merkezden görünmesini engelleyecektir.

Şimdi de T'nin bahçede olmadığını varsayalım. Demek ki OT uzunluğu bahçenin yarıçapından, yani 50'den daha büyük. Öte yandan T dikdörtgenin içinde, dolayısıyla OT uzunluğu OC'den daha küçük olmalı. OAC diküçgenine bakalım. Pisagor Teoremi'ne göre,

$$OC^2 = OA^2 + AC^2 = 50^2 + p^2 < 2500 + 1 = 2501.$$

Sonuç olarak,

$$2500 < OT^2 \leq OC^2 < 2501$$

eşitsizliklerini elde ettik. T tamnoktasının koordinatlarına x ve y diyelim. x ve y birer tamsayı. Dolayısıyla, $OT^2 = x^2 + y^2$ de bir tamsayı. Demek ki OT^2, 2500'den büyük ve 2501'den küçük bir tamsayı! Böyle bir tamsayı olmadığından, T noktası bahçenin içinde olmalı.

Problemimizi çözdük: Bahçenin dışını göremeyiz.

"O GÜN NEWTON YANLIŞ AĞACIN ALTINDAYDI..."

Blöfün Matematiği

Bu yazıda, basitleştirilmiş birkaç poker oyunu oynayacağız. Yazıyı anlamak için poker bilmeye gerek yoktur. Oyunlarımızı iki kişi arasında ve as ve papazdan oluşan büyük bir desteyle oynatacağız. İlk oyunumuzda ikinci oyuncu önceden belirlenmiş birkaç kurala uyan bir makina olacak. Son oyunumuzdaysa, her iki oyuncu da özgür seçimlerde bulunabilen kişiler olacaklar ve birinci oyuncu blöf yapabilecek. Böylece oyunlar kuramına bir çeşit giriş yapmış olacağız.

1) **Oyunun Kuralları.** İçinde yalnız as ve papaz bulunan **büyük** bir deste alalım. Destedeki as (A) sayısı papaz (K) sayısına eşit olsun. Örneğin destede 500 A, 500 K bulunabilir. Oyunumuz, iki oyuncu arasında ve bu oyunculara birer kâğıt dağıtılarak oynanıyor. Oyunun başında, her iki oyuncu da ortaya birer lira koyarlar. Sonra, her iki oyuncuya birer kâğıt dağıtılır. Birinci oyuncu kâğıdına bakar ve aşağıdaki iki seçenekten birini seçer:

1. Pas geçebilir.
2. İki lira artırabilir.

Eğer birinci oyuncu pas geçerse ikinci oyuncu ortadaki parayı (2 lirayı) alır. Eğer birinci oyuncu pas geçmez de 2 lira artırırsa ikinci oyuncu da ortaya 2 lira koyar ve oyuncular kâğıtlarını

açarlar; en yüksek kâğıdı olan ortadaki parayı (6 lirayı) alır. Eğer her iki oyuncunun da kâğıtları aynıysa, ortadaki para paylaşılır.

Görüldüğü gibi ikinci oyuncunun bu oyunda bir seçeneği yok, oyunun kurallarına paşa paşa uymak zorunda: Birinci oyuncu pas geçerse ikinci oyuncu ortadaki parayı alacak, pas geçmezse ikinci oyuncu ortaya 2 lira koyup elini açacak. İkinci oyuncuyu bir makina, bir bilgisayar ya da kurallara uymak zorunda olan bir kumarhane krupiyesi olarak düşünebiliriz. Dolayısıyla ikinci oyuncunun nasıl oynaması gerektiği sorusu anlamsızdır. Ama birinci oyuncunun seçeneği olduğundan, birinci oyuncunun nasıl oynaması gerektiği sorusunu sorabiliriz. Soralım: *Birinci oyuncu kazancını artırmak için nasıl oynamalıdır?* Yazıya biraz tad vermek için birinci oyuncu olduğumuzu ve ikinci oyuncunun bir makina olduğunu varsayacağız.

Okurun, "elimizde A varsa 2 lira artıralım, K varsa pas geçelim," dediğini duyar gibi oluyorum. Gerçekten de sezgimiz bu stratejinin doğru strateji olduğunu söylüyor. Bu oyuna biraz yakından bakıp sezgimizin yanılıp yanılmadığını anlayalım.

2) **Elimizde A varsa.** Eğer elimizde A varsa, pas geçmedikçe para kaybedemeyiz. En kötü olasılıkla ortadaki parayı makinayla paylaşırız, yani ne kazanır ne de kaybederiz. Dolayısıyla, elimizde A varsa pas geçmemeliyiz, 2 lira artırmalıyız. Bu basit akıl yürütmeyi biraz biçimselleştirelim. Elimizde A olduğunu varsayarak oyunun alabileceği çeşitli durumları yandaki şemada gösterdik.

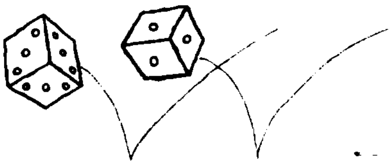
	Makinanın Kâğıdı	
Elimizde A var	A	K
Pas geçtik	–1	–1
Artırdık	0	3

Sütunlar makinanın kâğıdını, sıralar iki değişik stratejimizn sonuçlarınıi gösteriyor. Sayılarsa kazancımızı (ya da sayı negatifse kaybımızı) gösteriyorlar. Örneğin pas geçmeyip artırırsak ve makinanın papazı varsa, 3 lira kazanırız. Bu yüzden ikinci sıranın ikinci sütununa 3 yazdık. Pas geçersek, makinanın nesi

olursa olsun, 1 lira kaybederiz. Bu yüzden birinci sıraya – 1 yazdık.

Görüldüğü gibi bu tablonun son sırasındaki sayılar bir üstteki sayılardan daha büyük. Bir başka deyişle, makinanın kâğıdı ne olursa olsun, artırırsak kazancımız daha fazla olur. Sonuç: Elimizde A varsa, 2 lira artırmalıyız.

Bu stratejinin doğru strateji olduğunun destedeki A ve K sayısından bağımsız olduğuna dikkatinizi çekerim. Destede çok A, az K bile olsa, kâğıdımız A ise, 2 lira artırmalıyız.



Elimizde A olduğunda ve artırdığımızda, ortalama kazancımızı, yani beklentimizi hesaplayalım[1]. 1/2 olasılıkla öbür oyuncunun elinde A olacak ve 0 lira kazanacağız. 1/2 olasılıkla öbür oyuncunun elinde K olacak ve 3 lira kazanacağız. Demek ki oyun başına ortalama kazancımız, yani beklentimiz

$$(1/2)(0) + (1/2)(3) = 3/2 = 1{,}5$$

lira olacak. Bir başka deyişle, elimize 1000 kez A gelse ve her seferinde 2 lira artırırsak, 1500 lira kazanmalıyız.

3) **Elimizde K varsa.** Eğer elimizdeki kâğıt K ise, pas geçsek de geçmesek de para kazanamayız. Pas geçersek, oyunun başında ortaya koyduğumuz 1 lirayı kaybederiz. Pas geçmezsek, ba-

1 "Beklenti", ortalama kazanç demektır. Örneğin bir oyunda 1/8 olasılıkla 100 lira, 1/4 olasılıkla 10 lira kazanıyorsak ve geriye kalan 5/8 olasılıkla 20 lira kaybediyorsak, bu oyundan beklentimiz $(1/8)100 + (1/4)10 + (5/8)(-20) = 20/8$ liradır, yani 2,5 liradır. Demek ki bu oyunda, oyun başına ortalama 2,5 lira kazanırız. Bu oyunu bin kez oynarsak ve ne şanslı ne de şanssızsak, $1000 \times 2{,}5 = 2500$ lira kazanmalıyız. Demek ki bu oyun bizim için avantajlı bir oyundur. Bir başka oyunda 1/100 olasılıkla 100 lira ve geri kalan 99/100 olasılıkla 2 lira kaybediyorsak, bu oyunun beklentisi $(1/100)100 + (99/100)(-2) = -0{,}98$ liradır. Yani bu oyunu bin kez oynasak ve ne şanslı ne de şanssızsak, 980 lira kaybederiz. Bu oyunu oynamak işimize gelmez, oynamamalıyız. Genellikle Kazı Kazan ve Milli Piyango gibi oyunlarda tüketicinin beklentisi negatiftir, bu oyunları bir matematikçinin oynaması caiz değildir.

şımıza gelecekler makinanın kâğıdına göre değişir: Makinanın ası varsa 3 lira kaybederiz, makinanın papazı varsa ne kaybederiz ne de kazanırız. Bu durumda nasıl bir strateji izlememiz gerektiği pek belli değil. Pas geçip de 1 lira kaybetmeyi kabullenmeli miyiz, yoksa şansımızı deneyip 2 lira artırmalı mıyız?

Aşağıdaki hesaplarda, destedeki A ve K sayılarının birbirine eşit olduklarım varsayıyoruz.

Elimizde K olduğunu varsayalım ve oyunun alabileceği çeşitli durumları aşağıdaki tabloda gösterelim.

Elimizde K var	Makinanın Kâğıdı A	Makinanın Kâğıdı K
Pas geçtik	–1	–1
Artırdık	–3	0

Bu tablo birinci tablo gibi değil. Birinci tabloda bir sıranın sayıları öbür sıranın sayılarından daha büyüktü, dolayısıyla o tabloya bakarak doğru stratejiyi bulmak kolaydı. Burda işimiz biraz daha zor. Hiçbir sıranın sayıları bir başka sıranın sayılarından daha büyük değil. Doğru stratejiyi bulmak için bir başka yöntem bulmalıyız.

İki şıkkımız var: ya pas geçeceğiz ya geçmeyeceğiz. Her iki şıkkın beklentisini bulalım.

Önce pas geçtiğimizi varsayalım. Makinanın kâğıdı ne olursa olsun 1 lira kaybedeceğiz, bir başka deyişle –1 lira kazanacağız. Bu şıkta beklentimiz –1'dir. Demek ki pas geçersek oyun başına ortalama kazancımız –1 lira olur, yani pas geçtiğimiz her oyun başına ortalama 1 lira kaybederiz. Pek parlak sayılmaz.

Pas geçmezsek beklentimiz daha mı iyi olur? Pas geçmeyip 2 lira artırdığımızı varsayalım. Oyundaki A ve K sayısı birbirine (aşağı yukarı) eşit olduğundan, 1/2 olasılıkla öbür oyuncunun elinde A vardır; yani 1/2 olasılıkla –3 lira kazanırız. 1/2 olasılıkla öbür oyuncunun elinde K vardır; yani 1/2 olasılıkla 0 lira kazanırız. Bu şıkta beklentimiz

$$(1/2)(-3) + (1/2)(0) = -3/2 = -1,5$$

dir. Demek ki pas geçmezsek ortalama kazancımız –1,5 liradır. Daha önce bulduğumuz beklentiden daha az. Yani bu şıkta daha çok kaybederiz.

Demek ki elimizde K olduğunda pas geçmeliyiz.

5) **Sonuç.** Sonuç olarak, elimizde A varsa 2 lira artırmalıyız, K varsa pas geçmeliyiz.

Bu oyunu oynamalı mıyız? Yani bu oyundan beklentimiz pozitif midir? Beklentimiz pozitifse oynamalıyız, negatifse oynamamalıyız, sıfırsa oynasak da olur oynamasak da.

Elbet beklentimiz stratejiye göre değişir. Yukarda bulduğumuz stratejiyle oynadığımızı varsayacağız. (Eline A geldiğinde pas geçen, K geldiğinde artıran oyuncunun beklentisi çok negatif olsa gerek!)

Kâğıtlar dört biçimde dağılabilirler:

1/4 olasılıkla ikimize de A gelir; 0 lira kazanırız.
1/4 olasılıkla ikimize de K gelir; –1 lira kazanırız.
1/4 olasılıkla bize A ona K gelir; 3 lira kazanırız.
1/4 olasılıkla bize K ona A gelir; –1 lira kazanırız.

Dolayısıyla beklentimiz

$$(1/4)(0) + (1/4)(-1) + (1/4)(3) + (1/4)(-1) = 1/4$$

tür, yani pozitiftir, yani bu oyunu oynamak işimize gelir. Bu oyunu bin kez oynarsak, 250 lira kazanç beklemeliyiz.

Beklentinin pozitif olması gerektiğini okurlar yazının ta başında tahmin etmiş olabilirler. Ne de olsa inisiyatifi bizim almamız dışında oyunda eşitsizlik yok, sadece stratejiye biz karar veriyoruz. Makinanın karar alma yetklisi yok.

6) **Dağılım Eşit Değilse.** Yukarda, destedeki A ve K sayısının birbirine eşit olduğunu varsaydık. Ama her oyundan sonra oynanan kâğıtlar oyundan çıkarılırsa, destede kalan A ve K sayılarını hesaplayıp daha akıllıca oynayabiliriz.

Örneğin, diyelim elimize K geldi. Yukarda bulduğumuz yönteme göre, pas geçip 1 lira kaybetmeye razı olmalıyız. Ama, çıkan kâğıtları aklımızda tutmuşsak (destede iki tür kâğıt olduğundan kâğıtları saymak pek zor değildir) ve destede yalnız papazların kaldığını biliyorsak, makinanın kâğıdının K olduğunu biliyoruzdur. Bu bilgiyle pas geçmek akıllı bir seçim olmaz. 2 lira artıralım; hiç para kaybetmeyeceğimizden eminiz.

Ya da diyelim, destede 50 K ve 10 A var. Eğer elimizde papaz varsa, pas geçmeli miyiz? Belki de, "makinanın kâğıdı da büyük bir olasılıkla papazdır" deyip, 2 lira artırmalıyız.

Diyelim makinanın kâğıdı a olasılıkla astır[2]. Demek ki $1 - a$ olasılıkla makinanın papazı var. Eğer a, 1/2'den küçükse, destedeki asların sayısı papazlara göre daha azdır ve dolayısıyla oyunda kazanma şansımız artar. Nasıl oynamalıyız ki oyun başına kazanç ortalamamız, yani beklentimiz artsın?

Elimizde A varsa, hiç kuşku yok ki artırmalıyız. Peki, ya elimizde K varsa? Nasıl oynamalıyız?

Diyelim elimizde K var ve pas geçtik. 1 lira kaybederiz, yani beklentimiz –1'dir.

Diyelim elimizde K var ve 2 artırdık.

a olasılıkla makinada A vardır ve –3 kazanırız

$1 - a$ olasılıkla makinada K vardır ve 0 kazanırız.

Demek ki 2 artırırsak, beklentiiniz,

$$a(-3) + (1 - a)(0) = -3a$$

dır. Beklentimizin negatif bir sayı olması okuru şaşırtmamıştır. Elimizde K olduğundan, oyunun bizim aleyhimize olması gerekir.

---

2 Burda a, 0'la 1 arasında bir sayıdır. Matematikte olasılıklar 0'la 1 arasında değişir. %100'ün matematikçesi 1'dir. %25'in matematikçesi 1/4'tür.

Hangi beklenti daha iyidir, daha doğrusu daha az kötüdür? -1 mi yoksa $-3a$ mı?

Eğer $-3a > -1$ ise 2 artırmalıyız.

Eğer $-3a < -1$ ise pas geçmeliyiz.

Eğer $3a = -1$ ise ne yaparsak yapalım önemli değildir.

Sonuç olarak,

Makinaya A gelme olasılığı 1/3'ten fazlaysa,	pas geçmeliyiz	Beklentimiz -1'dir.
Makinaya A gelme olasılığı, a, 1/3'ten azsa,	2 artırmalıyız	Beklentimiz $-3a$'dır.
Makinaya A gelme olasılığı, 1/3 ise,	istediğimizi yapabiliriz	Beklentimiz -1'dir.

7) **Oyunu Biraz Değiştirelim.** Seçeneklerimizi ikiden üçe çıkaralım. İstersek pas geçebilelim, istersek 1 artırabilelim, istersek 2 artırabilelim. Makina gene yukardaki kurallara uyacak. Pas geçersek koyduğumuz parayı alacak, 1 lira koyarsak 1 lira koyacak, 2 lira koyarsak 2 lira koyacak.

Bu oyunu nasıl oynamalıyız? Kâğıtları saydığımızı da varsayalım, yani öbür oyuncunun eline kaç olasılıkla A, kaç olasılıkla K olduğunu bildiğimizi de varsayalım.

Her şeyden önce elimizde A varsa, kesinlikle 2 artırmalıyız. Çünkü elimizde A varsa kaybedemeyiz, en kötü olasılıkla parayı paylaşırız. Kazandığımızda daha çok para kazanabilmek için, kuralların izin verdiği en yüksek parayı (2 lira) öne sürmeliyiz.

Her zamanki gibi elimizde K olduğunda işler karışıyor. Elimizde K olduğunu varsayalım. Para kazanamayacağımızı biliyoruz. Dolayısıyla 2 artırmanın anlamı yoktur. Eğer illâ artırmak gerekiyorsa 1 artırmalı. Çünkü ne kadar çok artırırsak, o kadar çok kaybederiz ve kazandığımızda 1 lira da artırmış olsak, 2 lira da artırmış olsak 0 lira kazanırız. Kumar terimiyle, "tapi" kalkmak umuduyla artırıyoruz. Bunu matematiksel olarak kanıtlayalım.

Öbür oyuncunun elinde a olasılıkla A, $1 - a$ olasılıkla K olsun. Üç seçeneğimizin beklentilerini teker teker hesaplayalım. Bakalım hangisi daha büyük.

- Pas geçersek beklentimiz –1'dir.
- 1 artırırsak beklentimiz kaçtır? Hesaplayalım. a olasılıkla makinanın ası olacak ve –2 lira kazanacağız. $1 - a$ olasılıkla makinanın papazı olacak ve 0 lira kazanacağız. Demek ki 1 lira artırdığımızda beklentimiz $a(-2) + (1 - a)0 = -2a$'dır.
- 2 artırırsak beklentimiz kaçtır? a olasılıkla makinanın ası olacak ve –3 lira kazanacağız. $1 - a$ olasılıkla makinanın papazı olacak ve 0 lira kazanacağız. Demek ki 1 lira artırdığımızda beklentimiz $-3a$'dır.

Bu üç sayıdan (–1'den, $-2a$'dan ve $-3a$'dan) hangisi daha büyüktür? a en az 0 olduğundan, $-2a$, $-3a$'dan daha büyüktür. Demek ki 2 artırmak yerine 1 artırmalıyız. Şimdi geriye kalan –1 ve $-2a$ sayılarını karşılaştıralım. Hangisi daha büyüktür? Eğer $a < 1/2$ ise, $-2a$ daha büyüktür; demek ki bu şıkta 1 artırmalıyız. Eğer $a > 1/2$ ise, –1 daha büyüktür; demek ki bu şıkta pas geçmeliyiz. Eğer $a = 1/2$ ise, ister pas geçelim ister 1 artıralım (yeter ki 2 artırmayalım), beklentimiz –1'dir. Sonuç olarak,

Eğer $a \leq 1/2$ ise 1 artıralım. Beklentimiz $-2a$'dır.
Eğer $a \geq 1/2$ ise pas geçelim. Beklentimiz –1'dir.

8) Blöf Yapmalı mı? Yukarda makinaya seçenek vermedik. Bu bölümde makinaya da seçenek vereceğiz. Bu yüzden artık ikinci oyuncuya makina demeyeceğiz. İkinci oyuncu kişiliği olan bizim gibi bir insan olacak.

Bu bölümde ele alacağımız oyunun kuralları şöyle: Her iki oyuncu da oyunun başında ortaya birer lira koyar ve her ikisine de içinde hemen hemen eşit sayıda A ve K bulunan büyük bir desteden birer kâğıt dağıtılır. Destede A ve K'dan başka kâğıt yok. Gene birinci oyuncuyuz. İster pas geçeriz ister 2 lira artırırız. Pas geçersek ikinci oyuncu ortadaki 1 lirayı alır. Buraya değin oyunu-

muzun kuralları ilk oyununki gibi. Bundan sonrası değişik olacak. Eğer 2 lira artırırsak ikinci oyuncu ya pas geçebilir ya da 2 liramızı görüp elini açar. İkinci oyuncunun artırmaya hakkı yok.

Bu oyunda bizim ve ikinci oyuncunun en iyi stratejisinin ne olduğu sorusunu sorabiliriz.

Oyunu biraz inceleyelim. Elimizde A varsa, her zamanki gibi artırmalıyız. Bundan, yazının bu aşamasında kuşkumuz olmamalı.

İkinci oyuncunun elinde A varsa ve artırmışsak, ikinci oyuncu 2 liramızı görmeli, çünkü A ile kaybedemez. Bundan da kuşkumuz olmamalı.

Ya bizim elimizde K varsa? Elimizde K varsa blöf yapabiliriz! Elimizde K varsa, 2 lira artırarak ikinci oyuncuya elimizde as olduğuna inandırabiliriz. Ama, hep blöf yaparsak, ikinci oyuncu hep blöf yaptığımızı anlayabilir. Dolayısıyla her zaman değil arada bir blöf yapmalıyız, diye düşünebiliriz. Kaç oyunda bir elimizde papazla blöf yapmalıyız? Yani kaç olasılıkla? Ve ikinci oyuncu blöfümüzü (elinde papazla) görmeli mi?

Soru zor... Soru zor ama oyunun çözümlemesini (analizini) yaptığımızda bu zor sorunun kaybolduğunu göreceğiz.

Önce olasılıkları bir yana bırakalım ve stratejileri gözden geçirelim. Her oyun öncesi olası dört stratejimiz var:

1) Elimizde A da olsa K da olsa artırabiliriz.
2) Elimizde A da olsa K da olsa artırmayabiliriz.
3) Elimizde A olduğunda artırabiliriz.
4) Elimizde K olduğunda artırabiliriz.

Eğer artırmazsak, yani pas geçersek, ikinci oyuncunun bir seçeneği yok, 1 lirayı cebine indirir. Artırdığımızdaysa ikinci oyuncunun da dört stratejisi vardır:

1) Elinde ne olursa olsun görebilir.
2) Elinde ne olursa olsun görmez.
3) Elinde A olduğunda görür yalnızca.
4) Elinde K olduğunda görür yalnızca.

Demek ki oyunda toplam 4 × 4 = 16 strateji var. Bu stratejilerin herbirinin beklentisini kocaman bir tabloyla gösterelim:

	Hep kabul et		Hiç kabul etme		A ile kabul et		K ile kabul et	
Hep artır	AA	0	AA	1	AA	0	AA	1
	AK	3	AK	1	AK	1	AK	3
	KA	–3	KA	1	KA	–3	KA	1
	KK	0	KK	1	KK	1	KK	0
	Beklenti	0	Beklenti	1	Beklenti	-1/4	Beklenti	5/4
Hiç artırma	AA	–1	AA	–1	AA	–1	AA	–1
	AK	–1	AK	–1	AK	–1	AK	–1
	KA	–1	KA	–1	KA	–1	KA	–1
	KK	–1	KK	–1	KK	–1	KK	–1
	Beklenti	–1	Beklenti	–1	Beklenti	–1	Beklenti	–1
A ile artır	AA	0	AA	1	AA	0	AA	1
	AK	3	AK	1	AK	1	AK	3
	KA	–1	KA	–1	KA	–1	KA	–1
	KK	–1	KK	–1	KK	–1	KK	–1
	Beklenti	1/4	Beklenti	0	Beklenti	-1/4	Beklenti	1/2
K ile artır	AA	–1	AA	–1	AA	–1	AA	–1
	AK	–1	AK	–1	AK	–1	AK	–1
	KA	–3	KA	1	KA	–3	KA	1
	KK	0	KK	1	KK	1	KK	0
	Beklenti	-5/4	Beklenti	0	Beklenti	–1	Beklenti	-1/4

Bu tablonun nasıl hesaplandığını anlatalım. Sıralar her zamanki gibi bizim stratejilerimizi gösteriyor. Sütunlar da ikinci oyuncunun stratejilerini. Her iki oyuncunun da elinde as varsa AA yazdık. Elimizde A, ikinci oyuncuda K varsa, AK yazdık. Üçuncü sıranın dördüncü sütununu ele alalım. Üçüncü sırada olduğumuzdan, biz elimizde A olduğunda 2 lira artırıyoruz. Eğer elimizde K varsa pas geçiyoruz. Dördüncü sütunda olduğumuzdan, ikinci oyuncu elinde K olduğunda görüyor ve A olduğunda pas geçiyor. Eğer her ikimizin de elinde A varsa, yani AA şıkkındaysak, elimizde A olduğundan 2 artırırız ve ikinci oyuncu pas geçer. Dolayısıyla 1 kazanırız. Bu yüzden AA'nın yanına 1 yazdık. Eğer elimizde A, ikinci oyuncuda K varsa, 2 lira artırırız, ikinci oyuncu kabul eder ve 3 lirasını alırız. Dolayısıyla AK'nin yanına 3 yazdık. Eğer elimizde K varsa, pas geçeriz ve 1 lira kaybederiz. Bu yüzden KA ve KK'nin yanına –1 yazdık. En aşağıya da beklentiyi yazdık. Üçüncü sırayla dördüncü sütunun kesiştiği oyunun beklentisi

$$(1/4)(1) + (1/4)(3) + (1/4)(-1) + (1/4)(-1) = 1/2$$

dir. (As ve papazların eşit dağıldığını varsaydığımızı unutmayın.)

Tablodaki hesapları kaldırıp yalnızca beklentileri bırakalım:

	Hep	Hiç	A ile	K ile
Hep	0	1	–1/4	5/4
Hiç	–1	–1	–1	–1
A ile	1/4	0	–1/4	1/2
K ile	–5/4	0	–1	–1/4

Bu son tablo oyunu özetliyor. Bize gereken de bu özet zaten. Sıralar, birinci oyuncunun seçebileceği çeşitli stratejiler. Sütunlar, ikinci oyuncunun seçebileceği çeşitli stratejiler. Seçilen sırayla seçilen sütunun kesişimindeki sayı, o stratejilerle oynandığında, oyun başına birinci oyuncunun kazancını gösteriyor. Örneğin, elimizde A ile artırmaya ve K ile pas geçmeye karar verdiysek ve ikinci oyuncu yalnız A ile görmeye karar verdiyse, üçüncü sırayla üçüncü sütunun kesiştiği oyundayız. Beklentimiz –1/4'tür. Yani her iki oyuncu bu stratejilerle 1000 kez oynarlarsa, şanslar eşit olduğunda, birinci oyuncu 250 lira kaybeder, ikinci oyuncu 250 lira kazanır.

Biz birinci oyuncuyuz. Dolayısıyla sıralardan birini seçeceğiz. Bu seçim, stratejimizi belirleyecek. İkinci oyuncu sütunlardan birini seçecek, yani stratejisini belirleyecek. Bu seçimi birbirimizden gizli yapacağız. İkimiz de seçimlerimizi (stratejilerimizi) birbirimizden gizli bir kâğıda yazacağız. Sonra seçimlerimizi açıklayacağız. Her ikimiz de üçüncü stratejiyi seçmişsek, biz 1/4 lira kaybedeceğiz, öbür oyuncu 1/4 lira kazanacak. Oyunu bir kez değil, birçok kez oynayacağız. Ve her oyunda seçimimizi değiştirebiliriz. Yalnız dikkatli olmalı, eğer 5/4 lira kazanmak umuduyla hep birinci sırayı seçersek, ikinci oyuncu stratejimizi anlayabilir ve üçüncü sütunu seçer. Ve böylece 5/4 kazanmayı umarken 1/4 kaybedebiliriz.

Biz, birinci oyuncu olarak, hangi stratejiyi, yani hangi sırayı seçmeliyiz?

Artık iskambil kâğıdı kullanmadan poker oynadığımıza da dikkatinizi çekerim!

Yazının süreğini okumadan önce bu oyunu bir arkadaşınızla yirmi otuz kez oynamanızı öneririm. Zamanla doğru stratejiyi keşfedeceğinizden kuşkum yok. Böylece aşağıda yazdıklarımı daha iyi anlayacaksınız, hatta okumadan kendiniz keşfedeceksiniz.

İkinci sıra pek akıllı bir seçime benzemiyor. Çünkü ikinci sırayı seçersek (yani hep pas geçmeyi seçersek), öbür oyuncunun seçimi ne olursa olsun 1 lira kaybedeceğiz. İkinci sıra gerçekten de iyi bir seçim değildir. Ama iyi bir seçim olmamasının daha matematiksel bir nedeni vardır: ikinci sıranın her sayısı bir üstteki sayıdan daha küçüktür. Yani birinci sıra bize her zaman ikinci sıradan daha fazla para kazandırır (ya da daha az kaybettirir.) Dolayısıyla birinci sırayı seçmek ikinci sırayı seçmekten daha avantajlıdır. Demek ki hiçbir zaman ikinci sırayı seçmemeliyiz. Dolayısıyla ikinci sırayı oyundan silebiliriz.

Üçüncü sırayla dördüncü sırayı karşılaştırırsak, üçüncü sıranın daha işimize geldiği ortaya çıkar. Üçüncü sıranın her sayısı bir alttaki sayıdan daha büyük. Dolayısıyla, dördüncü sırayı seçmektense üçüncü sırayı seçmeliyiz. Dördüncü sırayı da oyundan silebiliriz. Demek ki iki sıralı, dört sütunlu bir oyun kaldı önümüzde:

	Hep	Hiç	A ile	K ile
Hep	0	1	–1/4	5/4
A ile	1/4	0	–1/4	1/2

Şimdi ikinci oyuncunun nasıl düşündüğüne bakalım. İkinci oyuncu, akıllı bir yaratık olduğumuzu biliyor. (Bilmiyorsa oyun sonunda öğrenir!) Yani ikinci ve dördüncü sıraları seçmeyeceğimizi, bu sıraları oyundan attığımızı biliyor. Demek ki ikinci oyuncunun da önünde yukardaki iki sıralı dört sütunlu oyun var. (Negatif sayılar, ikinci oyuncunun kazanacağını gösteriyor.) İkinci oyuncu bu tabloyu şöyle bir gözden geçirince,

üçüncü sütunun kendisi için en avantajlı sütun olduğunu anlayacaktır. Her şeyden önce üçüncü sütunu seçerse kaybetmesine olanak yoktur: birinci oyuncu ne seçerse seçsin ikinci oyuncu bu sütunu seçerse 1/4 lira kazanacaktır. Ama bunun da ötesinde, üçüncü sütunun her sayısı bulunduğu sıranın en küçük sayısı. Örneğin üçüncü sütunun her iki sayısı da bir sonraki sayılardan daha küçük. (Küçük sayıların ikinci oyuncunun işine geldiğini unutmayın.) İkinci oyuncu doğal olarak üçüncü sütunu dördüncü sütuna yeğler. Aynı şey öbür sütunlar için de doğru. Dolayısıyla ikinci oyuncu birinci, ikinci ve dördüncü sütunları oyundan atar. Geriye yandaki oyun kalır.

	A ile
Hep	–1/4
A ile	–1/4

Koca poker oyunu ne hale geldi!

Şimdi artık en iyi stratejiler belli olmuştur: Birinci oyuncu ya hep ya da yalnız A ile artırmalıdır. Dilerse eline bakmadan hep artırsın. Dilerse elindeki kâğıt A ise artırsın. Dilerse bu iki stratejiden birini seçmek için yazıtura atsın. Bu iki stratejisini değiştirerek oynayabilir. Arada bir hep artırır, arada bir yalnız A ile artırır. Sonuç olarak birinci oyuncu, elinde as varsa hep artırsın; K varsa, dilediğini yapsın. İkinci oyuncu blöf yaptığını anlasa da anlamasa da önemi yok. Oyunun beklentisi değişmez.

İkinci oyuncu, yalnız elinde A varsa, birinci oyuncunun 2 lirasını görmelidir, yoksa pas geçmelidir.

Sonuç olarak, bu stratejiler her iki oyuncunun en iyi stratejileridir. Bu en iyi stratejilerle oynandığında, birinci oyuncu oyun başına ortalama 1/4 lira kaybeder, ikinci oyuncu oyun başına 1/4 lira kazanır. Eğer birinci oyuncu başka strateji seçerse, bunu arada bir yapsa bile, 1/4 liradan daha fazla kaybeder (şanslar ve as ve papaz dağılımı eşitse.) İkinci oyuncu başka strateji seçerse, 1/4'ten daha az kazanır, hatta kaybedebilir bile.

Gördüğümüz gibi, bu oyun ikinci oyuncudan yana. Bunun böyle olması gerektiğini poker oyuncuları bilirler: En son konuşan oyuncunun avantajı!

Matematik ve Özgürlük

Hareketlerimizde ve aldığımız kararlarda gerçekten özgür müyüz? Yoksa ayrımına varmadığımız bir gücün, örneğin birtakım alışkanlıkların etkisi altında mıyız? Birkaç örnek verdikten sonra konuya matematiksel (ve biraz da kaçınılmaz olarak felsefi) yönden eğileceğim.

Dört İstek. Konuya girmeden önce sizden birkaç isteğim olacak:

1. Ayağa kalkın ve el bileğinizi tutun.
2. El tırnaklarınıza bakın.
3. Ayağa kalkıp topuğunuza bakın.
4. Eşinizle, nişanlınızla, sözlünüzle, sevgilinizle, karşı cinsten sevdiğiniz biriyle elele tutuşup biraz yürüyün.

Şimdi size ne yaptığınızı söyleyeceğim:

1. Sol bileğinizi tuttunuz.
2. Eğer erkekseniz, tırnaklarınıza bakmak için parmaklarınızı avcunuzun içine kıvırdınız. Eğer kadınsanız, parmaklarınızı yayıp elinizin sırtına baktınız.
3. Eğer erkekseniz topuğunuza bakmak için öne eğildiniz. Eğer kadınsanız topuğunuzu arkadan kaldırıp arkaya doğru büküldünüz.

4. Eğer erkekseniz sevdiğinizin elini önden kavramışsınızdır, yani elinizin sırtı yürüdüğünüz yöne bakar. Eğer kadınsanız, avcunuz yürüdüğünüz yöne bakar ve erkek avcunuzu önden kavramıştır.

Büyük bir olasılıkla tahminlerim doğru çıkmıştır. Bu tahminlerim sizi şaşırtmamış olabilir. Örneğin, insanlar genellikle sağak olduklarından, sol bileklerini tuttuklarını anlamışsınızdır. Amacım kimseyi şaşırtmak değildi zaten. Amacım, rasgele gibi gelebilecek seçimlerin kimileyin bir kurala uyduklarını göstermekti.

Yıllar önce erkeklerin sigarayı ağızlarının solunda, kadınlarınsa sağında tuttuklarım duymuştum. Gözlemlerim de bu yöndeydi.

Uygulamada hiçbir işe yarayacağına inanmadığım bu gözlemlerden sonra uygulamaya geçirilebilecek bir örnek vereyim.

Tüketici Psikolojisi. Yıllar önce Amerika'da tüketici psikolojisiyle ilgili bir gazete yazısı okumuştum. Birbirine hemen hemen eşdeğer olan iki tüketim maddesini ele almış araştırmacılar. Örneğin **The New York Times** ve **The Washington Post** gibi iki ciddi gazete, **Time** ve **Newsweek** gibi iki haftalık haber dergisi, **Pepsi Cola** ve **Coca Cola** gibi iki gazlı içit, **Playboy** ve **Penthouse** gibi iki aylık "erkek dergisi"... Birbirine çok benzeyen bu iki ürünü bir dükkânda, ortalık bir yerde sergilemişler. Ancak iki üründen birinden yüzlerce, öbüründense on yirmi tane kadar, yani az sayıda sergilemişler. Ürünler satıldıkça yerine yenilerini koymuşlar. Gün sonunda, çok sayıda sergilenen ürünün daha çok satılmış olduğu saptanmış.

Amerika için geçerli olan bu gözlem bir başka ülke için geçerli olmayabilir. Örneğin, Türkiye'de bunun tam tersi olabilir, "kalmayacak" korkusuyla insanlar az sergilenen ürünü daha çok alabilirler. Hatta deneyin sonucu, şehirden şehire, yaş grubundan yaş grubuna göre bile değişebilir. Gene de, bu deney-

den, aynı ortamda yetişmiş ve aynı ortamda yaşayan insanların davranışlarının ve kararlarının birbirine benzediği ortaya çıkıyor. Zaten böyle benzeşme olmasaydı toplumbilim ya da toplum psikolojisi gibi bilim dalları olmazdı.

En Çok Tutulan Sayılar. Çocukların oynadıkları bir oyun vardır. İki çocuktan biri, örneğin, 1'le 100 arasında bir sayı tutar. Öbür çocuk, "50'den büyük mü", "68'le 83 arasında mı" gibi yanıtı evet ya da hayır olabilecek sorular sorarak tutulan sayıyı bulmaya çalışır. Sonra, roller değişir, bu kez öbür çocuk 1'le 100 arasında bir sayı tutar. Tutulan sayıyı en çabuk bulan çocuk oyunu kazanır.

Bu oyunun stratejisi oldukça açıktır: sayılar ortadan ikiye bölünür. Örneğin ilk soru 50'den büyük mü" olabilir. Eğer yanıt evetse, ikinci soru "75'ten büyük mü" olabilir... Bu yöntemle, tutulan sayı en çok 7 soruda bulunur.

Ama diyelim ki çocuklardan biri öbür çocuğun yüzde 90 olasılıkla 40'la 60 arasında bir sayı tuttuğunu biliyor. O zaman ilk sorusu "40'la 60 arasında mı" olursa, oyunu kazanma olasılığı artar.

Yıllar önce, bir dersimde, hangi sayının yüzde kaç olasılıkla tutulduğu bilindiğinde bu oyunun en iyi stratejisinin nasıl bulunduğunu anlatacaktım. Derse biraz tat vermek için sınıfa bir şapkayla girdim. Öğrencilerden küçük bir kâğıda 1'le 10 arasında bir sayı yazıp şapkaya atmalarını istedim. Anlatacağım konuyu daha önce bilmediklerinden bu isteğime bir anlam veremediler ama yerine getirdiler. Yüz elli dolayında öğrenci vardı sınıfta. Her sayının seçilme olasılığı 1/10 olduğundan, her

sayı aşağı yukarı 15 kez seçilmeliydi. Bunu öğrencilerime anlattım. Kimse karşı çıkmadı, herkes aynı düşüncedeydi.

– Ama, diye ekledim, göreceğiz ki, en çok 7 seçilecek!

Şapkayı bir masaya boşalttık. Bir öğrenci seçilen sayıları teker teker okudu. Ben de bu sayıları karatahtaya yazdım. Tahmin ettiğim gibi öğrencilerin aşağı yukarı yüzde otuzu 7'yi seçmişti. Yüzde ondan çok daha büyük bir yüzde...

Hangi sayının hangi sıklıkta seçildiğini gözlemledikten sonra 1'le 10 arasında tutulan bir sayıyı bulma oyununun en iyi yani en hızlı stratejisini bulduk.

Bir başka ülkede başka sonuç bulunabilir, ama sanırım aynı ortamda, benzer koşullarda yetişmiş insanlar kimi sayıları öbür sayılara yeğleyeceklerdir.

Diyelim size benzeyen insanlar arasında (aynı yaş grubundan, benzer eğitimden geçmiş, aynı cinsiyetten insanlar arasında) bir anket yapılıyor. Bu insanlardan 8 ve 9 rakamlarından birini seçmeleri isteniyor. Diyelim bu insanların yüzde 80'i 9'u seçti. Bundan sizin de büyük bir olasılıkla 9'u seçeceğiniz çıkmaz mı?

İnsanlara sorulan soru, "kendinizi pencereden atacak mısınız" olsa, elbet çoğunluk "hayır" yanıtını verir. Ama insanlardan istenen iki sayıdan birini seçmeleri. İnsanların bir sayıyı öbürüne yeğlemeleri için görünürde bir neden yok. Ama sayılardan biri öbürüne yeğleniyor. Bu durumda özgür olduğumuz söylenebilir mi?

Newcomb'un Oyunu. 1960'ta Amerikalı fizikçi William Newcomb şu oyunu ortaya atar: Önünüzde içini göremediğiniz iki kapalı kutu duruyor. Birinci kutuda kesin 1 lira var. İkinci kutuysa ya boş ya da içinde 100 lira var. İki seçeneğiniz var:

1) Her iki kutuyu birden açabilirsiniz ve kutularda bulduğunuz paralar (ya 1 ya da 101 lira) sizin olur.

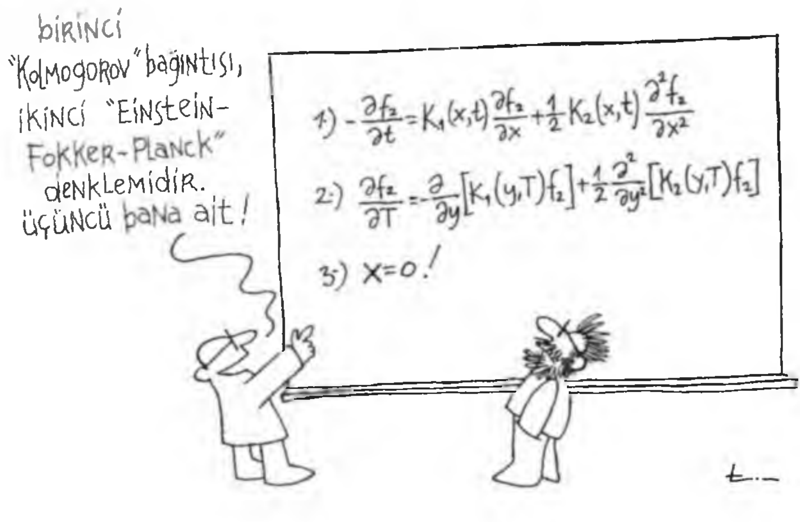
2) Salt ikinci kutuyu açabilirsiniz. Kutuda para varsa (100 lira) parayı cebinize atarsınız. Yoksa hava alırsınız.

Hangi seçeneği seçmelisiniz? İki kutuyu birden mi, yoksa salt ikinci kutuyu mu açmalısınız?

İki kutuyu birden açmalısınız elbet. Bunun hiçbir zararı olmadığı gibi yararı da vardır. İkinci kutuda para olsa da olmasa da, her iki kutuyu birden açarak, ikinci kutunun içindeki paradan başka, birinci kutudaki 1 lirayı da kazanırsınız. Geçerli bir neden olmadan 1 lirayı reddetmek doğru olmaz. Bunun pintilikle bir ilgisi yok, mantıkla ilgisi var.

Ama Newcomb'un oyunu bu kadarla kalmıyor. Newcomb bize bir bilgi daha veriyor. **Bir gün önce**, geleceği yüzde doksan doğrulukta görebilen olağanüstü yetili bir varlık, hangi seçeneği seçeceğinizi öngörüyor. Salt ikinci kutuyu açacağınızı öngörmüşse ikinci kutuya 100 lira koyuyor. Her iki kutuyu birden açacağınızı öngörmüşse (yani açgözlü olduğunuzu düşünüyorsa!) ikinci kutuyu boş bırakıyor. Bu bilgiyle hangi seçeneği seçmelisiniz? Her iki kutuyu birden mi açmalısınız, yoksa salt ikinci kutuyu mu?

Geleceği görebilen olağanüstü varlık Tanrı olabilir. İlla mükemmel bir Tanrı olması da gerekmez, yüzde 10 hata yapabilen bir Tanrı da olabilir. Ya da sizi çok iyi tanıyan biri olabilir,



örneğin, anneniz, babanız, eşiniz, psikoloğunuz... Bu varlık, sizin böyle bir oyunda ne seçeceğinizi yüzde 90, yüzde 60, yüzde 51 olasılıkla öngörebilir.

Varlık'ın yüzde 90 doğru öngördüğünü varsayalım.

Bir an için, her iki kutuyu birden açtığımızı düşünelim. Varlık her iki kutuyu birden açacağımızı öngörmüşse, yalnızca 1 lira kazanırız. Ama Varlık öngörüsünde yanılmışsa, sadece ikinci kutuyu açacağımızı düşünmüşse o zaman 101 lira kazanırız.

Salt ikinci kutuyu açtığımızı varsayalım şimdi de. Varlık salt ikinci kutuyu açacağımızı öngörmüşse 100 lira kazanırız. Varlık öngörüsünde yanılmışsa, yani her iki kutuyu birden açacağımızı sanmışsa, hiç para kazanamayız.

Bunu Varlık'la oynadığımız bir oyun olarak görebiliriz. Oyunumuz iki hamlelik bir oyun. İlk hamleyi Varlık yapıyor. İkinci (ve son) hamleyi de biz. Oyunu bir şemayla gösterelim:

	Varlık iki kutuyu birden açacağımızı öngörüyor	Varlık yalnızca ikinci kutuyu açacağımızı öngörüyor
İki kutuyu birden açıyoruz	1 TL	101 TL
Yalnız ikinci kutuyu açıyoruz	0 TL	100 TL

Bu oyunu nasıl oynarsınız? Varlık hamlesini yaptı. Sıra sizde... İki kutuyu birden mi açmalısınız, yoksa salt ikinci kutuyu mu[1]?

Birinci Yanıt. "İki kutuyu birden açarsam, Varlık bunu büyük bir olasılıkla öngörmüş olacak, dolayısıyla yalnızca 1 lira kazanacağım. Ama yalnızca ikinci kutuyu açarsam, Varlık yalnızca ikinci kutuyu açacağımı yüzde doksan olasılıkla öngörmüş olacağından büyük bir olasılıkla 100 lira kazanacağım. Demek ki yalnızca ikinci kutuyu açmalıyım."

1 Hangi stratejiyi seçeceğimizi yazı-tura atarak karar versek ne olur? Kaynakça [12]'de problemi sunarken, Varlık yazı-tura atacağımızı öngörürse, ikinci kutuyu boş bırakacağını söylüyor.

İkinci Yanıt. "Varlık öngörüsünü dün yaptı. Bugün alacağım karar ne bu öngörüyü ne de kutudaki paraları değiştirecek. Dolayısıyla istediğim kararı almakta özgürüm. Her iki kutuyu birden açarak (varsa elbet), ikinci kutudaki paradan başka, birinci kutudaki 1 lirayı da cebime indiririm. Yukardaki oyun şeması da iki kutuyu almanın daha doğru olduğunu söylüyor zaten: birinci sıradaki sayılar ikinci sıradaki sayılardan daha büyük. İkinci kutuda para olsa da olmasa da, her iki kutuyu birden açarak daha çok para kazanırım."

Hangi Yanıt Doğru? Felsefeci ve matematikçilerin hangi yanıtın doğru olduğu konusunda düşünmeleri gerekir. Her iki yanıt da savunulabilir.

Beklenti. Birinci yanıt "beklenti" ilkesine dayanıyor. Varlık'ın yüzde doksan doğru öngördüğünü varsayarak, her iki hamlemizin de beklentisini hesaplayalım. Önce her iki kutuyu da açtığımız duruma bakalım:

%90	olasılıkla Varlık iki kutuyu birden açacağımızı öngörüyor ve	1 lira kazanıyoruz
%10	olasılıkla Varlık yalnızca ikinci kutuyu açacağımızı öngörüyor ve	101 lira kazanıyoruz.

Beklentimiz bu durumda

$$(90/100) \times 1 + (10/100) \times 101 = 11$$

liradır.

Şimdi yalnızca ikinci kutuyu açtığımız duruma bakalım:

%10	olasılıkla Varlık iki kutuyu birden açacağımızı öngörüyor ve	0 lira kazanıyoruz
%90	olasılıkla Varlık salt ikinci kutuyu açacağımızı öngörüyor ve	100 lira kazanıyoruz

Beklentimiz bu durumda

$$(10/100) \times 0 + (90/100) \times 100 = 90$$

liradır. İkinci beklenti birincisinden daha fazla olduğundan, ikinci seçeneği seçmeliyiz, yani salt ikinci kutuyu açmalıyız. Demek ki birinci yanıt doğrudur.

Varlık'ın doğru öngörme oranı, yüzde 90 gibi yüksek bir sayı olacağına yüzde 51 bile olsa, salt ikinci kutuyu açmanın beklentisi, her iki kutuyu da açma beklentisinden daha yüksek çıkar. Demek ki, Varlık'ın doğru öngörme oranı yüzde 50'den biraz yüksek bile olsa (yüzde $100 \times 101/201 \approx 50{,}0248756$'den büyükse), beklenti yöntemi salt ikinci kutuyu açmamız gerektiğini söylüyor.

Üstünlük İlkesi. İkinci yanıt üstünlük ilkesine dayanıyor: Oyunun şemasına bakalım. Bu şemada, birinci sıranın sayıları hemen alttaki sayılardan daha yüksek (daha **üstün**) olduğundan, her iki kutuyu birden açmalıyız. Her iki kutuyu açmak, yalnızca ikinci kutuyu açmaktan daha **üstün** bir stratejidir.

Sonuç. Dediğim gibi, hangi stratejinin doğru olduğu konusunda matematikçiler ve felsefeciler anlaşamıyorlar. Kimine göre üstünlük ilkesini uygulayıp iki kutuyu birden açmalıyız, kimine göreyse beklenti ilkesini uygulayıp sadece ikinci kutuyu açmalıyız. Kimi de, bu soruya ne beklenti yönteminin ne de üstünlük ilkesinin uygulanabileceğini savunuyor.

Genellikle hareketlerinde özgür olduklarına inanan insanlar her iki kutuyu birden açmanın en iyi strateji olduğunu düşünüyorlar. Örneğin Jean–Paul Sartre sağ olsa ve Sartre'ın yaşam arkadaşı Simone de Beauvoire bu oyunu Sartre'a oynatsa, özgür olduğuna inanan ve yapıtlarında bunu sürekli savunan Sartre, biraz düşününce her iki kutuyu birden açmak isteyecektir. Simone de Beauvoire, Sartre'ı iyi tanıdığından, Sartre'ın bu stratejiyi seçeceğini öngörecek ve ikinci kutuyu boş bırakacak-

tır! Dolayısıyla özgür olduğuna inananlar (ve Varlık'a bunu belli edenler!) Varlık tarafından cezalandırılacaklardır!

"Öyle bir Varlık olamaz" demek çelişkiyi çözmez. Çünkü, geleceği yüzde 90 doğrulukla öngörebilen bir Varlık olmasa bile, bizi çok iyi tanıyan ve bu oyunu nasıl oynayacağımızı en az yüzde 51 olasılıkla öngörebilen bir insan vardır elbette.

Ben Ne Düşünüyorum? Bu oyunu oynayana dek, hangi stratejiden yana olduğumdan pek emin değildim. Oyunu bir kez oynadım (bu yazıyı yazdıktan ve bu kitabın ikinci basımından çok daha sonra.) Ben "Tanrı" oldum ve çok yakın bir arkadaşım seçim yaptı. Tahmin ettiğim gibi arkadaşım her iki kutuyu birden açtı. Her iki kutuyu birden açması gerekirdi elbet!

Bu oyunu oynasam, her iki kutuyu birden açarım. Beni tanıyan bir Varlık, her iki kutuyu açacağımı öngörür ve ikinci kutuyu boş bulurum! Gene de sağım solum belli olmaz, son anda yalnızca ikinci kutuyu açmaya karar verebilirim. Ve beş kuruş para kazanamam!

Kaynakça: Newcomb'un sorusu üzerine daha geniş bilgi ve tartışma [1,2,3,5,6,10,12,13,17]'de bulunabilir.

Saymak Sanıldığı Kadar Kolay Değildir

Bir matematikçinin bir zamanlar dediği gibi, saymasını bilenler ve bilmeyenler olmak üzere üç tür insan vardır... Bakalım siz hangi türdensiniz? Örneğin bir odada bulunan topları sayabilir misiniz?

Ayşe bomboş bir odada. Odanın kapısı ve penceresi açık. Murat odanın hemen dışında, kapının önünde. Murat'ın önünde 1, 2, 3, 4, ... diye sayılandırılmış sonsuz tane top var. Saat 12'ye 1 dakika kala, Murat 1 ve 2 sayılı topları Ayşe'nin bulunduğu odaya atıyor. Ayşe hiç zaman kaybetmeden 1 sayılı topu pencereden bahçeye atıyor. Saat 12'ye 1/2 dakika kala, Murat 3 ve 4 sayılı topları Ayşe'ye atıyor. Ayşe gene hiç zaman kaybetmeden 2 sayılı topu pencereden bahçeye atıyor. Saat 12'ye 1/3 dakika kala, Murat 5 ve 6 sayılı topları odaya atıyor. Ayşe bu sırada 3 sayılı topu pencereden bahçeye atıyor. Saat 12'ye 1/4 dakika kala Murat 7 ve 8 sayılı topları Ayşe'ye atıyor. Ayşe de 4 sayılı topu pencereden bahçeye atıyor.

Bu böyle hep devam ediyor. Ayşe'yle Murat gittikçe hızlanıyorlar. Murat'ın önündeki toplar ikişer ikişer azalıyor, pencereden bahçeye atılan toplar birer birer çoğalıyor...

Ayşe'nin odasındaki toplar da birer birer çoğalıyorlar elbet...

12'ye 1/1 var	Murat 1 ve 2'yi Ayşe'ye atıyor	Ayşe 1'i pencereden atıyor
12'ye 1/2 var	Murat 3 ve 4'ü Ayşe'ye atıyor	Ayşe 2'yi pencereden atıyor
12'ye 1/3 var	Murat 5 ve 6'yı Ayşe'ye atıyor	Ayşe 3'ü pencereden atıyor
12'ye 1/4 var	Murat 7 ve 8'i Ayşe'ye atıyor	Ayşe 4'ü pencereden atıyor
12'ye 1/5 var	Murat 9 ve 10'u Ayşe'ye atıyor	Ayşe 5'i pencereden atıyor
	...	
12'ye 1/*n* var	Murat 2*n*–1 ve 2*n*'yi Ayşe'ye atıyor	Ayşe *n*'yi pencereden atıyor
	...	

Soru: Saat tam 12'de odada kaç top vardır?

Murat'ın ve Ayşe'nin topları gittikçe artan bir hızla atıp atamayacakları, ya da sonsuz tane top olur mu gibi sorularla ilgilenmeyelim. Fiziksel engelleri ortadan kaldırıp, soruyu soyut düzeyde algılayalım.

Birinci Yanıt: Saat 12'de odada sonsuz tane top vardır. Çünkü Murat odaya hep iki top atmaktadır ve Ayşe odadan yalnızca bir top dışarı atmaktadır. Dolayısıyla odadaki top sayısı her hamleden sonra 1 artmaktadır. Bu yüzden, saat 12'de odada sonsuz tane top vardır.

İkinci Yanıt: Saat 12'de odada hiç top yoktur. Çünkü Ayşe her topu bir zaman sonra pencereden bahçeye atacaktır. Öyle değil mi? Saat 12'ye 1/*n* kala, Ayşe *n* sayılı topu pencereden bahçeye fırlatacaktır. Dolayısıyla her top bir zaman sonra odadan çıkacaktır ve saat 12'de odada hiç top kalamaz.

Asıl Soru: Yanıtlarımız birbirleriyle çelişiyor. Hangi yanıt doğru? Hangi yanıt yanlış? Yoksa her iki yanıt da mı yanlış? Öyleyse doğru yanıt nedir? Ve neden?

Asıl Sorunun Yanıtı: Her iki yanıt da doğru gibi gözüküyor. Ama her ikisi de doğru olamaz elbet. Biraz düşünelim.

Birinci yanıtta odadaki top sayısı gözönünde bulunduruluyor. Odadaki top sayısı hep 1 arttığından, saat 12'de odadaki top sayısının sonsuz olacağı öne sürülüyor.

İkinci yanıttaysa toplar teker teker gözönüne alınıyor. Her top bir zaman sonra odadan dışarı atılacağından, odada hiç top kalamaz deniliyor.

Doğru yanıt ikincisi. Birazdan ikinci yanıtın neden doğru olduğunu açıklayacağım. Bu paragrafta birinci yanıtın gerekçesinin neden geçerli olmadığını anlatmaya çalışayım: Odadaki top sayısının durmadan arttığı doğru. Bundan hiç kuşkumuz yok. Ancak bu olgu tek başına saat 12'de odada sonsuz tane top olduğunu kanıtlamaz! Odadaki top sayısı her an artabilir ve gene de saat 12'de odada hiç top kalmayabilir! Zaten burda olan da bu: Odadaki top sayısı artıyor ve saat 12'de odada hiç top kalmıyor.

Top sayısının artmasıyla saat 12'de odada sonsuz sayıda top bulunması arasındaki ilişki sanıldığı kadar güçlü değil, hatta önsezilerimize ters düşecek kadar zayıf!

İkinci yanıtın neden doğru olduğunu daha iyi anlamak için her an odada bulunan topları yazalım:

Saat	Odadaki toplar	Odadaki top sayısı
12'ye 1/1 kaladan hemen sonra	2	1
12'ye 1/2 kaladan hemen sonra	3, 4	2
12'ye 1/3 kaladan hemen sonra	4, 5, 6	3
12'ye 1/4 kaladan hemen sonra	5, 6, 7, 8	4
12'ye 1/5 kaladan hemen sonra	6, 7, 8, 9, 10	5
12'ye 1/6 kaladan hemen sonra	7, 8, 9, 10, 11, 12	6
...	...	...
12'ye $1/n$ kaladan hemen sonra	$n + 1, n + 2, ..., 2n$	n
...	...	...

Odadaki topları küme olarak gösterelim. 12'ye $1/n$ kaladan hemen sonra odada bulunan topların kümesine A_n diyelim. Demek ki,

$$A_1 = \{2\}$$
$$A_2 = \{3, 4\}$$
$$A_3 = \{4, 5, 6\}$$
$$A_4 = \{5, 6, 7, 8\}$$
$$A_5 = \{6, 7, 8, 9, 10\}$$
$$A_6 = \{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$
$$\ldots$$
$$A_n = \{n + 1, n + 2, \ldots\ldots\ldots\ldots, 2n\}$$
$$\ldots$$

eşitlikleri geçerli. Bu kümeler dizisinin sonsuzda ne olduğunu bulmak istiyoruz.

A_1 kümesi $\{2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$ kümesinin bir altkümesidir.

A_2 kümesi $\{3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}$ kümesinin bir altkümesidir.

A_3 kümesi $\{4, 5, 6, 7, 8, \ldots\}$ kümesinin bir altkümesidir.

Genel olarak A_n kümesi $\{n + 1, n + 2, n + 3, \ldots\}$ kümesinin bir altkümesidir.

B_n, n'den büyük tamsayılar kümesini simgelesin. Yani

$$B_n = \{n + 1, n + 2, n + 3, \ldots\}$$

olsun. Demek ki,

$$A_1 \subseteq B_1$$
$$A_2 \subseteq B_2$$
$$A_3 \subseteq B_3$$
$$A_4 \subseteq B_4$$
$$A_5 \subseteq B_5$$
$$\ldots$$
$$A_n \subseteq B_n$$
$$\ldots$$

tümceleri geçerli. A_n kümelerinin sonsuzda boş olduğunu göstermek için, B_n kümelerinin sonsuzda boş olduğunu göstermek yeterlidir. Ama B_n kümesi n'den büyük sayıları içerdiğinden, her sayı bir zaman sonra B_n'lerden birinin dışında kalır. Örneğin, 1995, B_{1995}'te değildir, B_{1996}'da da değildir; genel olarak, $n \geq 1995$ ise,

1995, B_n'de değildir. Bu dediğimiz yalnız 1995 için değil, her sayı için geçerli. Demek ki B_n kümeleri sonsuzda boşküme olurlar. Dolayısıyla A_n kümeleri de sonsuzda boşküme olurlar.

Burda yaptığımız ikinci yanıtın kanıtım açıklamaktan başka bir şey değil. İkinci yanıtın kanıtı doğrudur, yani ikinci yanıt doğrudur.

*

Yukardakine benzeyen şu bilmeceyi soralım: Murat Ayşe'ye her saniye iki tane (madeni) 1 lira versin. Ayşe de bu 2 lirayı cebine atsın. Ama Ayşe'nin cebi delik olsun ve cebine her iki lira koyuşunda, bir lira cebinden yere düşsün. Sonsuzda Ayşe'nin cebinde kaç lira olur?

Ayşe'nin cebindeki para her saniye artmaktadır. Çünkü her saniye Ayşe'nin cebine 2 lira girmektedir ve yalnızca 1 lira düşmektedir. Her saniye Ayşe 1 lira daha zenginleşir. Örneğin 10 saniye sonra Ayşe'nin cebinde 10 lira olacaktır, 11 saniye sonra 11 lirası olacaktır... Bundan, Ayşe'nin cebinde sonsuzda sonsuz lira olacağı çıkar mı?

Çıkmaz!

Paraların hangi sırayla yere düştükleri önemlidir. Örneğin, eğer paralar Ayşe'nin cebinden ilk hikâyemizdeki gibi teker teker sırayla düşerse, Ayşe'nin cebinde (sonsuzda) hiç para kalmaz. Öte yandan ilk lira Ayşe'nin cebine takılı kalırsa ve sonraki liralar Ayşe'nin cebinden **sırayla** teker teker düşerse, sonsuzda Ayşe'nin bir lirası olur.

Bir başka örnek verelim: Tek sayılı liralar Ayşe'nin cebine takılı kalırsa ve çift sayılı liralar teker teker düşerse, sonsuzda Ayşe'nin sonsuz parası olur. Hem yerde hem de Ayşe'nin cebinde sonsuz para olur.

Sonuç olarak, Ayşe'nin cebinde sonsuzda herhangi tutarda parası olabilir. Ayşe'nin cebinde kalacak para, liraların hangi sırayla düştüğüne bağlıdır.

Bu son problemi biraz zorlaştıralım. Ayşe'nin cebinden paraları rastgele düşürelim. Ayşe'nin cebine giren ilk iki lira, yere düşmek için yazı - tura atsınlar. 1/2 olasılıkla birinci lira düşsün, 1/2 olasılıkla ikinci lira. Bir saniye sonra Ayşe'nin cebine iki lira daha girecek ve böylece cebinde 3 lira olacak. Bu üç liradan biri de 1/3 olasılıkla yere düşsün. Bir saniye sonra Ayşe'nin cebine iki hra daha girecek ve cebinde 4 lira olacak. Bu dört liradan biri de 1/4 olasılıkla yere düşsün... Sonsuza değin bu böyle sürsün. Sonsuzda Ayşe'nin kaç parası olur?

Kimi okur, "Sonsuzda Ayşe'nin cebinde herhangi tutarda parası olabilir, 1 lirası da olabilir, sonsuz parası da olabilir," yanıtını verecektir. Gerçekten de biraz önce bunun böyle olduğunu görmemiş miydik?

Doğru yanıt bu değil. Ayşe'nin cebinden paralar **rastgele** düşerse, sonsuzda Ayşe'nin **yüzdeyüz olasılıkla** sıfır lirası olacaktır. "Rastgele" sözcüğünün altını özellikle çizdim.

Paralar yere **rastgele** düştüğünde neden Ayşe'nin cebinde sonsuzda hiç para kalmaz?

Ayşe'nin cebine konan paraları numaralandıralım. 1 sayılı lirayı, yani birinci lirayı ele alalım. Bu liranın **yüzdeyüz olasılıkla** bir zaman sonra Ayşe'nin cebinden düşeceğini kanıtlayacağım. Yani, birinci liranın Ayşe'nin cebinde sonsuza değin kalma **olasılığının sıfır** olduğunu kanıtlayacağım.

Bu lira, 1/2 olasılıkla daha ilk turda Ayşe'nin cebinden düşecektir. Ve gene 1/2 olasılıkla birinci turda Ayşe'nin cebinde kalacaktır. Demek ki birinci liranın birinci turda düşmeme olasılığı 1/2'dir.

Birinci liranın birinci turda düşmediğini varsayalım. İkinci turda, Ayşe'nin cebinde 3 lira vardır. 1/3 olasılıkla birinci lira düşecektir ve 2/3 olasılıkla düşmeyecektir. Demek ki birinci liranın ne birinci ne de ikinci turda düşmeme olasılığı,

$$1/2 \times 2/3 = 1/3$$

tür.

Birinci liranın ikinci turda da düşmediğini varsayalım. Üçüncü turda Ayşe'nin cebinde 4 lira vardır. Birinci lira 1/4 olasılıkla düşecektir, 3/4 olasılıkla düşmeyecektir. Demek ki birinci liranın ne birinci ne ikinci ne de üçüncü turda düşmeme olasılığı

$$1/2 \times 2/3 \times 3/4 = 1/4$$

tür.

Okur hesapları sürdürebilir. Birinci liranın ilk 4 turda düşmeme olasılığı,

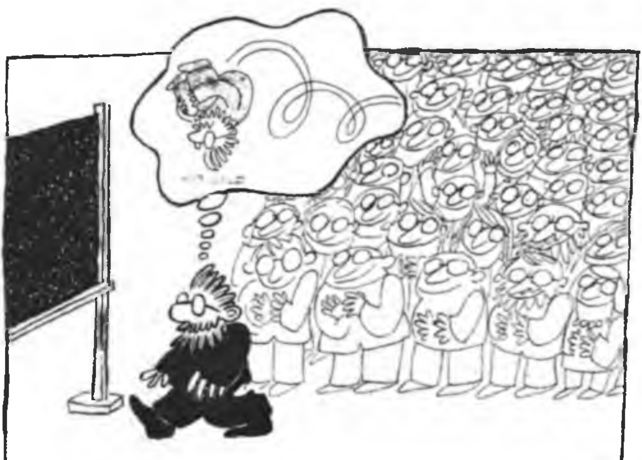
$$1/2 \times 2/3 \times 3/4 \times 4/5 = 1/5$$

tir.

Genel olarak, birinci liranın ilk n turda (yani saniyede) düşmeme olasılığı $1/(n + 1)$'dir.

Bu olasılıklar n büyüdükçe küçülür. Yani, birinci liranın düşmeme olasılığı gittikçe azalır. Bunu zaten biliyorduk. Ama şimdi yeni bir olgu keşfettik: Bu olasılıklar azalır, azalır ve n sonsuza yaklaştıkça, sıfıra yaklaşırlar. Yani birinci liranın hiç düşmeme olasılığı sıfırdır. Dolayısıyla, birinci lira 1 olasılıkla (yani %100) sonlu bir zaman sonra düşecektir!

Birinci lirayla yaptığımızı, herhangi bir lirayla da yapabiliriz. Her lira bir zaman sonra 1 olasılıkla düşecektir. Yani sonsuzda Ayşe'nin cebinde hiç para kalmaz (1 olasılıkla!).



Kimin Kazandığı Bilinen Ama Nasıl Kazandığı Bilinmeyen Bir Oyun

Oyunumuz iki kişi arasında ve $n \times m$ boyutlu bir dikdörtgenin içindeki ***tamnoktalarla*** oynanıyor. Örneğin, 5×3 boyutlu bir oyun, aşağıdaki şeklin en solundan başlar. Oyuncular sırayla bir nokta seçerler ve seçtikleri noktayla o noktanın kuzeyiyle doğusu arasında kalan noktalar silinir. Örneğin, 5×3 boyutlu oyunda, birinci oyuncu (4, 2) noktasını seçerse, oyun bir sonraki duruma dönüşür.

Şimdi sıra ikinci oyuncuda. İkinci oyuncu en sağdaki (5, 1) noktasını seçerse, o nokta oyundan silinir ve oyun üçüncü duruma dönüşür. Sıra gene birinci oyuncuda. Birinci oyuncu (3, 2) noktasını seçerse, oyun dördüncü duruma dönüşür. Sıra ikinci oyuncuda. İkinci oyuncunun (2, 3) noktasını seçtiğini varsayalım. O zaman oyun, yukarda gösterilen son duruma dönüşür. Sıra birinci oyuncuda...

Oyun böyle sürer. Oyunda hiç nokta bırakmayan oyuncu, yani (1, 1) noktasını seçen oyuncu oyunu kaybeder. Bu yüzden, kamikaze yapmak istemeyen bir oyuncu (1, 1) noktasını zorunlu olmadıkça seçmez.

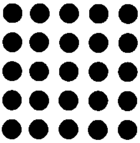
1×1'lik oyunu, yani ● oyununu, birinci oyuncu kaybeder. Çünkü ilk hamlesini yapar yapmaz oyunda hiç nokta kalmaz.

Eğer $n > 1$ ise, $n \times 1$'lik oyunu, yani ●●● ... ●● oyununu birinci oyuncu kazanır: (2, 1) noktasını seçer ve ikinci oyuncuya tek noktalı bir oyun bırakır; ikinci oyuncu son noktayı seçmek zorunda olduğundan oyunu kaybeder.

Eğer $n > 1$ ise, $1 \times n$'lik oyunu da birinci oyuncu kazanır: (1, 2) noktasını seçer ve ikinci oyuncuya bir noktalık bir oyun bırakır.

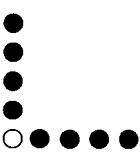
2×2'lik oyunu, yani ●●
●● oyununu da birinci oyuncu kazanır. Oyunu kazanmak için (2, 2) noktasını seçer ve oyunu ●
●● durumuna dönüştürür. Bu durumda ikinci oyuncu ne oynarsa oynasın, birinci oyuncu kazanacak hamleyi bulur. Birinci oyuncu (2, 2) noktasından başka bir nokta seçerse oyunu kaybeder. Yani, birinci oyuncu 2×2 oyunlarını ancak iyi oynarsa kazanır.

Birinci Soru. Eğer $n > 1$ ise, $n \times n$'lik oyunları birinci oyuncu kazanır. Bu oyunları kazanmak için birinci oyuncu nasıl oy-



namalıdır? Örneğin, 5×5'lik oyunu, yani oyununu birinci oyuncu (iyi oynayarak) kazanır. Bu kare oyunları birinci oyuncu nasıl oynarsa kazanır? Bir başka deyişle, kare oyunlarda birinci oyuncunun ***kazanan bir stratejisi*** vardır, bu stratejiyi bulun.

Birinci Sorunun Yanıtı: Birinci oyuncu (2, 2) noktasını seçer kazanmak için. Böylece oyun simetrik bir oyuna dönüşür. Örneğin, birinci oyuncu, ilk hamlesinde, yukardaki 5×5'lik oyunu yandaki oyuna dönüştürür. Nitekim, yandaki şekilde beyaza bo-



yadığımız (1, 1) noktası kaybeden (ya da yasak) hamle olduğundan, o noktayı oyundan atarsak, geriye, dikey dört noktadan oluşan bir oyun ve yatay dört noktadan oluşan bir oyun kalır; üstelik bu oyunlar birbirinden bağımsızdır, yani birinde yapılan bir hamle diğerini etkilemez. Bir başka deyişle ikinci oyuncu-

ya birbirinin tıpatıp aynısı iki oyun kalmıştır. İkinci oyuncu hangi oyunda hangi hamleyi yaparsa, birinci oyuncu diğer oyunda aynı hamleyi yapar ve ikinci oyuncuya gene simetrik bir oyun sunar. Böylece ikinci oyuncu hamle yapabildikçe birinci oyuncu da hamle yapabilir. Birinci oyuncu hep ikinci oyuncunun hamlelerinin simetriğini oynar. Eğer ikinci oyuncu (3, 1) noktasını seçerse, birinci oyuncu (1, 3) hamlesini seçer. Birinci oyuncu bu stratejisini sürdürürse oyunu kaybedemez, yani kazanır.

İkinci Soru. $n \times 2$'lik oyunları da birinci oyuncu iyi oynayarak kazanır. Birinci oyuncu bu oyunları kazanmak için nasıl oynamalıdır? Örneğin, 8×2'lik oyunu, yani

●●●●●●●●
●●●●●●●●

oyununu birinci oyuncu (iyi oynarsa) kazanır. Birinci oyuncu bu ve bunun gibi $n \times 2$'lik oyunları kazanmak için nasıl oynamalıdır?

İkinci Sorunun Yanıtı: Birinci oyuncu, kazanmak için, her hamlesinden sonra birinci sıradaki nokta sayısının ikinci sıradaki nokta sayısından bir fazla olmasını sağlamalıdır. Örneğin, yukardaki oyunda birinci oyuncu (8, 2) noktasını seçip

●●●●●●●
●●●●●●●●

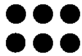
oyununu ikinci oyuncuya sunmalıdır. İkinci oyuncu ne oynarsa oynasın, birinci oyuncu oyunu yukardaki oyuna benzeyen bir oyuna dönüştürebilir. Örneğin, ikinci oyuncunun (6, 2) noktasını seçtiğini varsayalım. O zaman birinci oyuncuya

●●●●●
●●●●●●●●

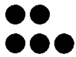
oyunu kalır. Birinci oyuncu bu durumda (7, 1) noktasını seçmelidir, ki ikinci sırada birinci sıradan bir fazla nokta kalsın. Şimdi ikinci oyuncuya

●●●●●
●●●●●●

oyunu kalır. Bu durumda ikinci oyuncunun (4, 1) noktasını seçtiğini varsayalım. O zaman oyun



oyununa dönüşür. Birinci oyuncu bu durumda (3, 2) noktasını seçmelidir ve ikinci oyuncuya

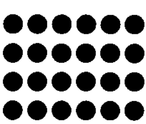


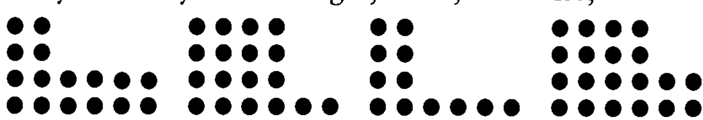
oyununu bırakmalıdır. Oyun böylece sürer gider ve birinci oyuncu oyunu kaybedemez, yani kazanır.

Üçüncü Soru. 1×1'lik oyun dışında, her $n \times m$'lik oyunu birinci oyuncunun kazandığını kanıtlayın.

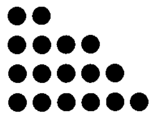
Üçüncü Sorunun Yanıtı: Dikkat edilirse, birinci oyuncunun **nasıl** oynayıp da kazanacağını sormadım. Bu soruyu sona sakladım. Birinci oyuncunun nasıl oynayıp da kazanacağını ben de bilmiyorum. Ancak birinci oyuncunun kazanan bir stratejisi olduğunu biliyorum. kazanan stratejiyi bilmiyorum ama kazanan stratejinin varlığını biliyorum...

Herhangi bir $n \times m$'lik oyunu ele alalım. Örneğin, $n = 6$ ve $m = 4$ olabilir. Yani soldaki oyunu ele almış olabiliriz. Birinci oyuncuya Ahmet, ikinci oyuncuya Birol diyelim. Ahmet'in oyunun başında yapabileceği bütün hamleleri ve bu hamlelerden sonra oyunun dönüşeceği bütün oyunları ele alalım. Yani tek bir hamle sonra bu oyunun dönüşebileceği oyunları ele alalım. Bu oyunlara X-oyunları diyelim. Örneğin, $n = 6$, $m = 4$ ise,





oyunları X-oyunlarıdır. Öte yandan, aşağıda oyun bir X-oyunu değildir.



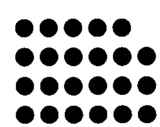
$n \times m$'lik oyunda Ahmet'in nm tane değişik hamlesi olduğundan, nm tane X-oyunu vardır. Ahmet, Birol'a bu X-oyunlarından birini bırakacaktır. Ve Birol önüne konan bu X-oyununun birinci oyuncusu olacaktır. Ahmet'se, ikinci oyuncunun kazandığı bu X-oyununun ikinci oyuncusu olacaktır.

Eğer X-oyunlarından birini ikinci oyuncu kazanıyorsa, Ahmet, $n \times m$'lik oyunu bu X-oyununa dönüştürerek $n \times m$'lik oyunu kazanır. Çünkü Ahmet, bu X-oyununun ikinci oyuncusu olacaktır, dolayısıyla kazanacaktır.

Öte yandan, eğer X-oyunlarının hepsini birinci oyuncu kazanıyorsa, Ahmet, $n \times m$'lik oyunu kaybeder. Çünkü Ahmet ne oynarsa oynasın, Birol'a bir X-oyunu sunacaktır ve Birol bu X-oyununun birinci oyuncusu olacaktır, dolayısıyla kazanacaktır.

Şimdi, yukardaki $n \times m$'lik oyunu Ahmet'in iyi oynayarak kazanabileceğini kanıtlayabiliriz. Bir an için bunun doğru olmadığını varsayalım. Yani, bir an için, Ahmet'in bu oyunu (nasıl oynarsa oynasın) kaybedeceğini varsayalım. Bir çelişki elde edeceğiz. Daha açık olalım: Ahmet'in bu oyunu kazandığını kanıtlayacağız! Yani, Ahmet'in $n \times m$'lik oyunu (nasıl oynarsa oynasın) kaybettiğini varsayıp, bu oyunu kazanacağını kanıtlayacağız! Böylece Ahmet'in oyunu kazanacak biçimde oynayabileceği kanıtlanmış olacak.

Varsayımımıza göre $n \times m$'lik oyunu Ahmet kaybediyor. Demek ki X-oyunlarının hepsini birinci oyuncu kazanır. Şimdi, Ahmet en üst ve en sağdaki noktayı seçsin. Yani dikdörtgenden en köşedeki noktayı silsin. Örneğin $n = 6$, $m = 4$ ise, Birol'a soldaki X-oyunu kalır. Şimdi sıra Birol'da. Bu X-oyununda Birol ne oynarsa oynasın, Ahmet'e gene bir X-oyunu bırakmak zorun-



dadır! Öyle değil mi? Yukardaki şekle biraz bakınca, Birol'un her hamlesinin oyunu gene bir başka X-oyununa dönüştürdüğü anlaşılır. Demek ki Ahmet'in önüne bir X-oyunu gelecektir ve Ahmet, önüne gelen bu yeni X-oyununun birinci oyuncusu olacaktır, dolayısıyla kazanacaktır! İstediğimizi kanıtladık.

Kanıtımızı şöyle özetleyebiliriz:

1) **Çelişki elde edilecek varsayım:** $n \times m$'lik oyunu Ahmet ne oynarsa oynasın kaybediyor.

2) Demek ki bütün X-oyunlarım birinci oyuncu kazanıyor.

3) Ahmet, ilk hamlesinde (n, m) noktasını seçsin.

4) Birol, önüne gelen bu oyunu bir X-oyununa dönüştürmek zorundadır.

5) Şimdi Ahmet bu X-oyununun birinci oyuncusu olacaktır ve (2)'ye göre kazanacaktır.

6) Demek ki Ahmet, $n \times m$'lik oyunu kazanır. Varsayımımızla çeliştik. Sonuç: Varsayım yanlıştır ve $n \times m$'lik oyunu Ahmet kazanır.

Dördüncü Soru. Eğer $nm > 1$ ise, $n \times m$'lik oyunlarını birinci oyuncunun kazandığını biliyoruz. Birinci oyuncu bu oyunları kazanmak için nasıl oynamalıdır?

Dördüncü Sorunun Yanıtı: Bilmiyorum.

Öte yandan, belli bir $n \times m$'lik oyunun stratejisi bulunabilir. Örneğin, 5×7, 8×4 gibi oyunların stratejisi biraz zaman alsa da bulunabilir. Ama genel olarak $n \times m$'lik oyunların stratejisini bilmiyorum. Kimsenin bildiğini de sanmıyorum.

Beşinci Soru. Oyuna bir önceki sayfadaki son şekille başlarsak kim kazanır? Bunu da bilmiyorum...

Ramsey Teoremi

Bir odada sonsuz sayıda insanın bulunduğunu varsayalım. Bu odada bulunan herhangi iki kişi birbirlerini ya tanırlar ya da tanımazlar. Burası belli. Yanıtı belli olmayan soru şu: Bu odadan, öyle sonsuz sayıda insan seçebilir miyiz ki, bu seçtiğimiz insanların ya hepsi birbirini tanısın ya da kimse kimseyi tanımasın?

Yanıt, okurun da tahmin ettiğini sandığım gibi, "evet, seçebiliriz"dir. Bu, Ramsey adlı bir matematikçinin kanıtladığı çok ünlü bir teoremin sonucudur. Ramsey Teoremi bugün dallanıp budaklanmış, matematikte ***Ramsey Kuramı*** adında başlıbaşına bir dal olmuştur. Bu yazıda Ramsey'in bu ünlü teoremini kanıtlayacağız.

Önce yukardaki soruyu matematikselleştirelim. Her kişiyi bir nokta olarak gösterelim. Eğer iki kişi birbirini tanıyorsa, bu iki insana eşdüşen noktaları kırmızı bir çizgiyle birleştirelim. Eğer iki kişi birbirini tanımıyorsa, bu iki kişiye eşdüşen noktaları mavi bir çizgiyle birleştirelim. Her ikisi kırmızı ya da mavi çizgiyle birleştirilmiş sonsuz sayıda nokta elde ettik. Bu noktalar arasından, hep aynı renkle (ya hep kırmızıyla ya hep maviyle) birleştirilmiş sonsuz sayıda nokta bulacağız.

Kanıtımıza başlıyoruz.

Kanıtımızı iki aşamada gerçekleştireceğiz. Birinci aşamada öyle sonsuz sayıda

$$a_0, a_1, a_2, a_3, ..., a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, ...$$

noktası bulacağız ki, **her a_i kendisinden sonra gelen**

$$a_{i+1}, a_{i+2}, a_{i+3}, ...$$

noktalarıyla aynı renk çizgiyle (ya hep kırmızı, ya hep mavi çizgiyle) **bağlanmış olacak.**

Birinci noktayı (a_0'ı) seçmek kolay. Herhangi bir nokta işi görür. a_1, a_2, a_3, ... noktalarım biraz daha dikkatli seçeceğiz. Bu a_1, a_2, a_3, ... noktalarını öyle seçmeliyiz ki, a_0 noktası bu noktalarla hep aynı renk çizgiyle bağlanmış olsun.

a_0 noktası, (kişileri simgeleyen) öbür noktalarla ya kırmızı ya da mavi bir çizgiyle bağlanmıştır. Sonsuz sayıda nokta olduğundan ve yalnızca iki renk bağlantı olduğundan, a_0'ın aynı renk çizgiyle bağlandığı sonsuz sayıda nokta vardır. a_0'ın hep aynı renk çizgiyle bağlandığı sonsuz bir nokta kümesi alalım. Bu kümeye A_0 diyelim. Demek ki,

a_0, A_0'ın noktalarıyla hep aynı renk çizgiyle bağlanmıştır.

Bunu aklımızda tutalım. a_1, a_2, a_3, ... noktalarını bu A_0 kümesinde seçeceğiz. Böylece a_0 noktası istediğimiz koşulu sağlamış olacak.

Şimdi A_0'dan herhangi bir a_1 noktası alalım. a_1 noktası, A_0'ın öbür noktalarına ya kırmızı ya da mavi bir renkle bağlanmıştır. A_0'da sonsuz sayıda nokta olduğundan ve yalnızca iki rengimiz olduğundan, A_0 kümesinde, a_1'in aynı renk çizgiyle bağlandığı sonsuz sayıda nokta vardır. Yani, ya

$\{a \in A_0 : a_1$ noktası a'yla kırmızı bir çizgiyle bağlanmış$\}$

kümesi, ya da

$\{a \in A_0 : a_1$ noktası a'yla mavi bir çizgiyle bağlanmış$\}$

kümesi sonsuzdur. Bu kümelerden sonsuz olanına A_1 adını verelim. Demek ki,

a_1, A_1'in noktalarıyla hep aynı renk çizgiyle bağlanmıştır.

a_2, a_3, a_4, ... noktalarını A_1'de seçeceğiz ve böylece yukardaki koşul a_1 için sağlanmış olacak.

Şimdi A_1'den herhangi bir a_2 noktası alalım. a_2 noktası A_1'in öbür noktalarıyla ya kırmızı ya da mavi bir çizgiyle bağlanmıştır. A_1'de sonsuz nokta olduğundan ve yalnızca iki rengimiz olduğundan, A_1'de, a_1'in hep aynı renkle bağlandığı sonsuz sayıda nokta vardır. Bir başka deyişle, ya

$\{a \in A_1 : a_2$ noktası a'yla kırmızı bir çizgiyle bağlanmış$\}$

kümesi, ya da

$\{a \in A_1 : a_2$ noktası a'yla mavi bir çizgiyle bağlanmış$\}$

kümesi sonsuzdur. Bu kümelerden sonsuz olanına A_2 adını verelim. Demek ki,

a_2, A_2'nin noktalarıyla hep aynı renk çizgiyle bağlanmıştır.

a_3, a_4, a_5, ... noktalarını A_2'de seçeceğiz ve böylece yukardaki koşul a_2 için sağlanmış olacak.

Şimdi A_2'den herhangi bir a_3 noktası alalım. Yukarda yaptıklarımızı a_3 ve A_2 için yapalım. A_2'nin içinde, öyle bir sonsuz A_3 kümesi bulalım ki, a_3, A_3'ün her noktasıyla hep aynı renk çizgiyle bağlanmış olsun.

Bunu böylece sonsuza değin sürdürebiliriz. Demek ki, öyle

$$a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, ...$$

noktaları bulabiliriz ki, her nokta kendisinden sonra gelen noktalarla aynı renk çizgiyle bağlanmış olsun.

Kanıtın birinci aşamasını tamamladık. Sıra ikinci aşamaya geldi.

Yukarda dikkatle seçtiğimiz bu a_0, a_1, a_2, a_3, ... noktalarının herbirine bir renk vereceğiz. Eğer bir nokta kendisinden sonra gelen noktalarla hep kırmızı çizgiyle bağlanmışsa, o noktaya ***kırmızı nokta*** diyeceğiz. Yoksa, o noktaya ***mavi nokta*** diyeceğiz. Örneğin, eğer a_0 noktası, kendisinden sonra gelen a_1, a_2, a_3, ... noktalarıyla hep kırmızı bir çizgiyle bağlanmışsa, a_0 noktasına kırmızı nokta diyeceğiz. Eğer a_5 noktası kendisinden sonra gelen a_6, a_7, a_8, ... noktalarıyla hep mavi çizgiyle bağlanmışsa, a_5 noktasına mavi nokta diyeceğiz.

Sonsuz sayıda nokta olduğundan ve yalnızca iki rengimiz olduğundan,

$$a_0, a_1, a_2, a_3, ...$$

noktalarından sonsuz tanesi aynı renk noktadır. Bir başka deyişle, ya kırmızı noktalar kümesi ya da mavi noktalar kümesi sonsuzdur. Matematiksel olarak söyleyecek olursak, ya

$$\{a_i : a_i \text{ kırmızı bir nokta}\}$$

ya da

$$\{a_i : a_i \text{ mavi bir nokta}\}$$

kümesi sonsuzdur. İki küme birden de sonsuz olabilir, ama en azından birinin sonsuz olduğunu biliyoruz. İki kümeden sonsuz olanını alalım. Öbür noktaları atalım. Noktalarımızı yeniden adlandırarak, her noktanın aynı renk olduğunu varsayabiliriz, diyelim hepsi kırmızı. Demek ki,

$$a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, ...$$

noktalarının herbirinin kırmızı olduğunu varsayıyoruz. Bu kümeden iki nokta alalım: a_i ve a_j. Diyelim i, j'den daha küçük.

a_i, kırmızı bir nokta olduğundan, a_i noktası a_j noktasıyla kırmızı bir çizgiyle bağlanmıştır. Demek ki yukardaki sonsuz nokta birbirleriyle aynı renk çizgiyle (kırmızıyla) bağlanmıştır. Ramsey'in teoremi kanıtlanmış oldu.

Elbette iki renkle yaptığımızı üç renkle, dört renkle, genel olarak sonlu renkle de yapabilirdik. Ramsey'in asıl teoremi de zaten genel olarak n renk içindir:

Ramsey Teoremi: *n tane renk ve sonsuz sayıda noktamız olsun. Her iki nokta, bu n renkten bir çizgiyle birleştirilmiş olsun. O zaman, her iki noktası aynı renk çizgiyle birleştirilmiş sonsuz sayıda nokta vardır.*

Türkiye'nin sessiz kahramanlarından özverili ögretmen Osman Karakök'e

Zenon'un Paradoksları

Zenon, İÖ 5'inci yüzyılda yaşamış ve bugün üzerine pek az bildiğimiz Eski Yunanlı bir filozoftur. Ne yazık ki günümüze hiçbir yapıtı kalmamıştır. Zenon üzerine bildiklerimizi daha çok Eflatun'a (Parmenides adlı yapıtına) ve Aristo'ya (Fizik adlı yapıtına) borçluyuz.

Zenon kolay kolay yutulmayacak bir düşüncenin savunucusu olan Parmenides'in sadık bir öğrencisiydi. Parmenides şu inanılmaz düşünceyi savunuyordu: *Gerçek tektir ve değişmez. Çokluk, değişim ve hareket aslında yokturlar ve çokluk, değişim ve hareket izlenimleri duyularımızın bizi kandırmasından kaynaklanırlar...*

Zenon, belki de hocasının felsefesiyle alay edenlerin ağızlarının payını vermek için dört paradoks geliştirir. Zenon'un günümüze kalmasını sağlayan ve aşağıda açıklamaya çalışacağım (ve ne derece ciddi olduklarını göstermek amacıyla savunacağım) işte bu dört paradokstur. Bugün, yani 2500 yıl sonra bile, bu dört paradoks üzerine tartışma dinmemiştir ve gün geçtikçe filozoflar bu konuda daha fazla düşünce üretmektedirler. Bertrand Russell, Henri Bergson, Alfred North Whitehead, Zenon'un paradokslarını konu etmiş çağdaş filozoflardan birkaçıdır. Sanırım Hegel de konu etmiştir. Tolstoy, Savaş ve Barış'ında Zenon'un paradokslarından sözeder.

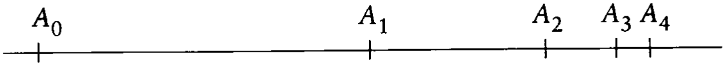
Aşil'le Kaplumbağa. Zenon, paradokslarının birinde, yarı-tanrı Aşil'le kaplumbağayı yarıştırır. Aşil Truva savaşının baş-kahramanıdır. MS 1'inci yüzyıldan sonraya kadar izi sürülen bir söylenceye göre annesi Tetis, Aşil'i doğumundan hemen sonra dünyayla cehennem arasındaki sınırda bulunan ölümsüzlük ırmağı Styx'e batırmış ama ayak bileğinden tutarak batırdığı için, Aşil'in ayak bileğinin arkası ıslanmamış. Dolayısıyla Aşil sadece ayak bileğinin arkasından ölümlüymüş. Nitekim Aşil, Paris'in bir okuyla ayak bileğinin arkasından vurularak ölmüştür. Aşil tendonu sözü de buradan gelir.

Kaplumbağa Aşil'den çok daha yavaş olduğundan, Aşil'in önünden başlar yarışa. Zenon, Aşil'in kaplumbağayı hiç yakalayamayacağını savunur. Şöyle:

Kaplumbağayı yakalayabilmesi için, Aşil'in önce kaplumbağanın yarışa başladığı ilk noktaya erişmesi gerekmektedir. Aşil bu noktaya eriştiğindeyse, kaplumbağa biraz daha ilerde olacaktır, çünkü kaplumbağa da koşmaktadır. Şimdi Aşil, kaplumbağanın bulunduğu bu yeni noktaya erişmelidir. Aşil, kaplumbağanın bulunduğu bu yeni noktaya vardığındaysa, kaplumbağa biraz daha ilerde olacaktır. Çünkü kaplumbağa hiç durmamakta, devamlı gitmektedir. Bu böylece sürer gider ve Aşil kaplumbağaya hiçbir zaman erişemez.

Yaşamda böyle olmaz demeyin. Parmenides de, Zenon da, sizin gibi, yaşamda Aşil'in kaplumbağayı yakalayacağını biliyorlar. Ancak, gördüğümüzün gerçek olmadığını, duyularımızın bizi aldattığını ileri sürüyorlar.

Bu paradoks üzerine düşünelim. Fikirlerimizi sabitlemek için, Aşil'in yarışa kaplumbağanın 100 metre gerisinden başladığını varsayalım. Aşil diyelim saniyede 100 metre hızla koşsun. Kaplumbağa kıpırdamasa, Aşil 1 saniyede yakalayacak kaplumbağayı. Ama kaplumbağa kaçıyor... Kaplumbağa da saniyede 10 metre hızla koşsun. Varsayalım ki öyle... Aşil'in ya-



rışa başladığı noktaya A_0 adını verelim. Aşil 1 saniye sonra kaplumbağanın başlangıç noktası olan A_1 noktasına erişecektir. Bu 1 saniyede kaplumbağa 10 metre yol alacaktır ve A_2 noktasına varacaktır. Aşil A_2 noktasına 1/10 saniye sonra varacaktır. Bu 1/10 saniyede kaplumbağa 1 metre gitmiş olacaktır. Aşil bu 1 metreyi, 1/100 saniyede koşacaktır...

* * *

Paradoks olur da matematikçiler boş durur mu? Matematikçiler bu paradoksu çözmüşler. Şöyle çözmüşler:

Aşil A_0 noktasından A_1 noktasına	1 saniyede	koşar
Aşil A_1 noktasından A_2 noktasına	1/10 saniyede	koşar
Aşil A_2 noktasından A_3 noktasına	1/100 saniyede	koşar
Aşil A_3 noktasından A_4 noktasına	1/1000 saniyede	koşar
...	...	...

Demek ki, der matematiçiler, Aşil,

$$1 + 1/10 + 1/100 + 1/1000 + \ldots$$

saniyede kaplumbağaya erişir. Basit bir aritmetik bu sonsuz toplamın 10/9 olduğunu gösterir[1]. Dolayısıyla Aşil kaplumbağayı 10/9 saniye sonra, yani 2 saniyeden, hatta 1,2 saniyeden az bir zamanda yakalar.

Filozoflar bu yanıttan pek hoşnut kalmazlar. Her şeyden önce sonsuz toplamdan rahatsız olurlar. Filozoflar, matematikçilerin matematik yaparken sonsuz tane sayıyı toplamalarına karışmazlar, ama gerçek yaşamdan alınmış bir probleme uygulanmasına ve sonra çözümün yaşama uygulanmasına karşı çıkarlar. Matematiğin gerçek yaşama her zaman uygulanabildiği nerden biliniyor? Zaten Zenon'un sorunu da tam bu değil mi?

---

1 Hesaplamak istediğimiz $1 + 1/10 + 1/100 + \ldots$ sonsuz toplamına S adını verelim :

$$S = 1 + 1/10 + 1/100 + \ldots$$

Şimdi S'yi 10'la çarpalım :

$$10S = 10 + 1 + 1/10 + 1/100 + \ldots = 10 + S.$$

Yani $10S = 10 + S$. Bu eşitlikten de S'nin 10/9 olduğu çıkar...

Matematik, doğa yasalarını bulmaya çalışır. Bunu da oldukça iyi başarır. Örneğin matematik sayesinde uçaklar, trenler, binalar yapılır, hatta aya gidilir. Matematiğin birçok uygulaması vardır. Bu uygulamalar matematiğin doğayı anlamamızı sağlayan başarılı bir yöntem olduğunu gösterir. Ama her yere her zaman matematik uygulanabilir mi? Örneğin, iki elma artı üç armut beş meyve eder, çünkü 2 + 3 = 5'tir. Ama bu matematiksel gerçeği iki litre suyla üç litre alkole uygularsak, beş litre sıvı elde edeceğimiz çıkar, ki bu da yanlıştır. (Bu dediğim yanlış değilse de mutlaka buna benzer bir şey yanlıştır. Kimyagerlere sormak lazım.) Demek ki matematiği uygularken dikkatli olmalıyız.

Doğa, matematiğin tam bir modeli değildir. Doğa matematiğin ancak yaklaşık bir modeli olabilir[2].

Üstelik, yukardaki hesap, Aşil'in kaplumbağayı 10/9 saniyede yakalayacağını göstermiyor. Yukardaki hesap gösterse gösterse Aşil'in kaplumbağayı **eğer yakalarsa** 10/9 saniyede yakalayacağını gösteriyor. Aşil'in kaplumbağayı yakalayıp yakalamadığını kanıtlamadık ki, ne zaman yakalayacağı sorusunu

---

2 Bu sözlerim yazıyı okuyan birkaç dostum tuhaf buldu. Doğayı küçük gördüğüm, matematiği çok yücelttiğim sonucunu çıkardılar. Amacım bu değildi elbet. Sanırım yanlış anlama "model" sözcüğünden kaynaklanıyor.

"Model" sözcüğü matematikte şu anlamda kullanılır: Matematiksel bir kuram aksiyomlardan ve bu aksiyomlar kullanılarak kanıtlanan teoremlerden oluşur. Örneğin Öklid geometrisi bir kuramdır, aksiyomları ve teoremleri vardır. Bir tane Öklid geometrisi vardır. Oysa Öklid geometrisinin aksiyomlarının, dolayısıyla teoremlerinin de, geçerli olduğu birçok uzay vardır. Bu uzaylardan herbiri Öklid geometrisinin bir modelidir.

Matematikte model, bir kuramın aksiyomlarının ve dolayısıyla teoremlerinin de geçerli olduğu uzaydır/ortamdır/yapıdır/dünyadır. Bir kuramın uygulanabildiği "dünyaya" o kuramın ***modeli*** adı verilir. Biraz matematik bilenler için örnekleri çoğaltabilirim. Gruplar kuramı, halkalar kuramı, cisimler kuramı birer kuramdırlar, aksiyomlardan ve teoremlerden oluşurlar. Her grup, her halka ve her cisim bu kuramların bir modelidir.

Sonuç olarak şunu söylemek istiyorum: Yukardaki sözlerimle doğayı küçümsemeyi, matematiği yüceltmeyi amaçlamadım; yalnızca kuramsal matematiğin aksiyomlarının doğaya uygulanamayabileceğini belirtmek istedim.

sorup yanıtlayalım... Sorumuz, Aşil'in kaplumbağayı ne zaman yakalayacağı değil, yakalayıp yakalayamayacağı!

Yanlış anlaşılmasın, çağdaş felsefecilerin çoğu - hepsi değil ama - Aşil'in kaplumbağayı yakalayacağına inanıyorlar. Felsefecilerin derdi bu değil. Felsefecilerin derdi Zenon'un paradoksu... Zenon'un paradoksunda yanlış nerde? Eğer mantığımızı kullanarak saçma bir sonuç kanıtlarsak, mantığımızda (yani ya varsayımlarımızda ya çıkarım kurallarımızda) bir yanlış var demektir. Bu yanlışı bulmalıyız.

Zenon'un bu paradoksunda bir başka sorun daha var. O da şu: Aşil kaplumbağayı yakalamak için sonsuz sayıda iş yapmalı; önce A_1 noktasına gitmeli, sonra A_2 noktasına gitmeli, sonra A_3 noktasına gitmeli... Sonsuz sayıda iş yapabilir miyiz? İşte canalıcı soru bu. Matematikçi kendi düşünsel dünyasında sonsuz tane sayıyı toplayabilir, ama biz, yaşamda, sonsuz tane sayıyı toplayamayız. Sonsuz sayıda iş yapamayız. En azından sonsuz sayıda iş yapabileceğimizi hayal etmek oldukça zor.

Yoksa Aşil kaplumbağaya erişmek için sonlu sayıda iş mi yapıyor? Bu soruya geçmeden önce Zenon'un ikinci paradoksundan sözedelim.

İkiye Bölünme. Zenon, salt Aşil'in kaplumbağayı yakalayamayacağını söylemekle yetinmiyor. Aşil'in bir noktadan bir başka noktaya gidemeyeceğini de söylüyor. Diyelim Aşil *A* noktasında ve *B* noktasına gidecek.

Aşil *A*'dan *B*'ye gitmek için önce yolun yarısına gitmeli. Yolun yarısına gittikten sonra kalan yolun yarısına gitmeli. Daha sonra kalan yolun yarısına... Bu böylecene sonsuza dek sürer.

Diyelim *A*'yla *B* arasındaki uzaklık 1 metre. Aşil önce 1/2 metre gitmeli. Gittiğini varsayalım. Geriye 1/2 metre kalır. Şimdi Aşil kalan bu 1/2 metrenin yarısına gitmeli, yani 1/4 metre daha gitmeli. Geriye 1/4 metre daha kalır. Aşil bu kalan 1/4 metrenin yarısına gitmeli, yani 1/8 metre daha gitmeli... Daha sonra 1/16 metre daha gitmeli...

Sonsuz sayıda iş yapamayacağından Aşil *B*'ye varamaz...

Havada uçan bir oka bakalım. Okun sonsuz sayıda iş yaptığını, yani sonsuz tane noktadan geçtiğini varsayalım. Beynimiz okun sonsuz sayıda noktadan geçişini algılıyabilir mi? Bunu düşünmek oldukça zor. Olsa olsa beynimiz okun havada sonlu sayıda fotoğrafını çekiyordur ve bu fotoğrafları bir sinema şeriti gibi gözümüzün önünden geçiriyordur. Bu konuya birazdan geleceğim. Paradoksa geri dönelim. Ama şimdilik, beynimizin dışdünyayı sonlu biçimde algıladığını (başka türlü olamaz çünkü) aklımızda tutalım.

Okur belki sonsuz sayıda iş yapabileceğimizi düşünüyordur: birinci iş, ikinci iş, üçüncü iş... O zaman sonsuz iş yapmaya sondan başlayalım! Birinci paradoksa çok benzeyen bu ikinci paradoksu biraz değiştirip, Aşil'in, bırakın *B* noktasına gidememesini, yerinden bile kımıldayamayacağım da kanıtlayabiliriz. Gerçekten de Aşil'in *A*'dan *B*'ye gidebilmesi için önce yarı yola gitmesi gerekir. Yolun yarısına gidebilmesi için önce yolun dörtte birine gitmesi gerekir. Ama daha önce yolun sekizde birine gitmesi gerekir... Daha önce de on altıda birine gitmesi gerekir... Dolayısıyla Aşil *A* noktasından öteye adımını atamaz bile. Gideceği ilk nokta yoktur ki! Gideceği her mesafenin önce yarısına gitmesi gerekmektedir.

Yoksa *A*'yla *B* arasında ve *A*'dan hemen sonra gelen bir nokta mı var? Galiba öyle...

Paradoksun ikiye bölünmekten kaynaklandığı kesin. Aşil'in gitmesi gereken fiziksel uzaklığı hep ikiye bölüyoruz. Demek ki fiziksel uzaklığı (uzayı) durmadan ikiye bölemeyiz. İkiye böle bö-

le, bir zaman sonra öylesine küçük bir uzaklık elde ederiz ki, elde edilen bu miniminnacık uzaklık bir kez daha ikiye bölünemez. Bir başka deyişle, **fiziksel uzay sürekli değildir.** Uzay, bölünmeyen en küçük uzay parçacıklarından oluşmuştur. Yirminci yüzyılın parçacık kuramı da bu yönde düşünmemiz gerektiğini söylemiyor mu zaten? Bu uzay parçacıklarına **uzaybirim** diyelim[3].

Uzayın uzaybirimlerden oluştuğunu kanıtladık!. Her uzaklık sonlu sayıda uzaybirimden oluşur.

Üçüncü Paradoks. Zenon'un üçüncü paradoksuna göre, hareket yoktur, hiçbir şey hareket edemez. Uçan bir ok ele alalım örnek olarak. Okun hareket ettiğini sanıyoruz değil mi? Zenon yanıldığımızı söylüyor.

Ok her an durmaktadır. İnanmazsanız okun havada bir fotoğrafını çekin. Fotoğrafta okun durduğunu göreceksiniz. Demek ki ok her an durmaktadır. Ok her an durduğuna göre hep duruyor demektir. Öyle değil mi? Hareket edebilmesi için okun en az bir an hareket etmesi gerekmektedir. Oysa ok her an durmaktadır. Her an durmakta olan ok hep durmaktadır!

Uzayın sürekli olamayacağını yukarda gördük. Uzay küçük, çok küçük, bölünemeyen uzaybirimlerden oluşmuştur. Okun bir uzaybirim uzunluğunda olduğunu varsayalım. Uzaybirim uzunluğundaki ok, bir uzaybiriminin içinde hareket edemez, çünkü okun o uzaybiriminde hareket edebilmesi için, okun uzaybiriminden daha kısa olması gerekir ki, uzaybirimden daha kısa bir nesne olamayacağını biliyoruz. Her uzaybiriminde hareketsiz duran ok, hep hareketsizdir.

---

3 Bergson bu paradoksları ve aşağıda açıklayacağım ok paradoksunu şöyle çözmeyi öneriyor: Bir hareketin belirlenmesi için hareketin başladığı ve bittiği noktaların verilmesi gerekmektedir. Okun hareketini ikiye bölmek demek, bir hareketin değil, iki hareketin olduğunu göstermek demektir. Okun hareketini ikiye bölmeye hakkımız yoktur. Okun bir ve bir tek hareketi vardır. Okun aldığı yolu ikiye bölebiliriz ama okun hareketini ikiye bölemeyiz. Pek tatmin edici bir açıklama olduğunu söyleyemem.

Sinema da öyle değil midir? Sinema ekranında yürüyen bir insan aslında yürümeyen binlerce insan resminin gözümüzün önünden hızla geçmesi değil midir? Doğada hareket de aslında hareketsizlik değil midir[4]?

Uçan ok her an durmaktadır. Ama bir sonraki uzaybiriminde varolmaktadır. Bergson'un da dediği gibi, aynen sinema ekranında yürüyen bir insan örneği, ok bize hareket edermiş gibi görünmektedir. Oysa her an durmaktadır.

Birinci paradoksumuzun bir başka kaynağı da aslında zamanın sürekli olduğunu varsaymak... Kaplumbağa sürekli hareket edebilir mi? Çok çok kısa (zamanbirim) sürelerle de olsa hareketsiz kalıyor olamaz mı?

Dördüncü Paradoks. Zenon'un son paradoksunu anlamak kolay değil. Yukarda da dediğim gibi Zenon'dan yazılı bir yapıt yok elimizde. Zenon'un paradokslarını bize aktaran Aristo. Aristo'nun aktardığı biçim pek anlaşılır gibi değil. Bu yüzden dördüncü paradoksun çeşitli yorumları var. Vereceğim yorum Aristo'nun aktardığı yorum değil ama ona çok yakın.

Yukarda, uzayın sürekli olmadığını, bölünmeyen **uzaybirimlerden** oluştuğunu kanıtladık, daha doğrusu Zenon kanıtladı.

Şimdi şu şekle bakalım: $\boxed{A}\boxed{B}$ Her kare bir uzaybirimini simgelesin. Sol üst köşede *A* nesnesi, sağ alt köşede *B* nesnesi var. *A* ve *B* aynı anda ve aynı hızla "hareket" etsinler. *A* sağa, *B* sola gitsin. Bir zaman sonra *A* sağdaki karede, *B* de soldaki karede olur.

Şimdi paradoksal soruyu soralım: *A* ve *B* nerde karşılaştılar?

Hiç karşılaşmadılar! Çünkü aralarında karşılaşabilecekleri bir yer yok!

---

4 Bunların benim düşüncelerim olmadığını, Zenon'un düşünceleri ya da Zenon'un düşüncelerinin yorumu olduğunu anımsatırım. Okuru kışkırtmak amacıyla, kendimi haddim olmayarak Zenon'un yerine koyarak Zenon'un paradokslarını savunur görünüyorum.

Matematik ve Doğa

Matematikle doğa arasındaki ilişkiyi kendimce irdelemek istiyorum bu yazımda.

1. Matematik Doğada Var mıdır? Matematiksel kavramlar doğada var mıdır? Olmadığını savunanlar var. Aşağı yukarı şöyle savunuyorlar:

> Doğada matematiksel bir nokta yoktur örneğin. Çünkü matematiksel nokta boyutsuzdur, ne elle tutulabilir ne gözle görülebilir. Kalemi kâğıda dokundurduğumuzda elde ettiğimiz "nokta" boyutludur, matematiksel nokta gibi boyutsuz değildir. Elektronun, üç boyutu ve az da olsa bir ağırlığı vardır. "İşte nokta" diye gösterebileceğimiz bir nesne yoktur doğada. Doğada matematiksel nokta yoktur, olsa olsa çok küçük benekler vardır. "Nokta" kavramı insanların uydurması/yaratısıdır.
>
> Doğada matematiksel anlamda bir doğru da yoktur. Kâğıdın üstüne çizdiğimiz "düz" çizgi hem sonludur, hem düz değildir, hem de birden fazla boyutu vardır. Kalemimiz ne denli ince yazarsa

yazsın, çizdiğimiz her "düz" çizginin belli bir genişliği ve kalınlığı vardır. Oysa matematiksel doğru bir boyutludur, genişliği ve yüksekliği yoktur.

Doğada "sonsuz" da yoktur. Yaşadığımız evren sonludur. Evrendeki molekül, atom, elektron, foton sayıları sonludur. Kimse sonsuza kadar sayamaz, kimse sonsuzu gösteremez, kimse sonsuza gidemez, kimse sonsuzda olduğunu düşünemez. Düşlerimiz bile sonluda yer alır.

Doğada π sayısı da yoktur. Çünkü π sayısı 3,141592653589... diye sonsuza uzayıp giden bir sayıdır. Virgülden sonra gelen sayılar belli bir düzene göre de yinelenmezler. Bu yüzden, yani sonsuz olmadığından doğada π de yoktur. Kimse π'yi tam olarak yazamaz. π'yi, bir çemberin uzunluğunun çapına bölündüğünde (ki tam olarak hesaplanamaz bu uzunluklar) elde edilen sayı olarak tanımlamak, π'nin doğada olduğunu göstermeye yeterli değildir. Çünkü bir çemberi ve çapını hesaplayıp bölme işlemini yaptığımızda, π'yi değil, π'ye yaklaşık bir sayıyı buluruz. Kaldı ki doğada matematiksel anlamda bir çember yoktur! Doğada "işte çember" diye gösterebileceğimiz bir nesne yoktur. Çember matematikçilerin yarattıkları bir kavramdır[1]. Zaten uygulamada hiçbir zaman π gibi gerçel sayılara gereksinmeyiz. 3,14159 = 314159/10000 gibi kesirli sayılar uygulamada yeterlidir. Bu da, π'nin doğada olmadığı savını desteklemez mi?

Doğada π olmadığı gibi, 0,9999999... sayısı da

---

1 "Dünya yuvarlak değildir. Bir portakal yuvarlak değildir. Bu portakal dilimlerinin içini açın, çekirdeklerinin sayı ve şekil bakımından aynı olmadığını görürsünüz." Renoir [14]

yoktur[2]. Çünkü bu sayıyı yazmak için virgülden sonra sonsuz tane 9 koymalıyız ve ne yazık ki bu iş için yeterince zamanımız yoktur!

Doğada "bir" yoktur. Doğada olsa olsa "bir elma, bir armut" vardır. Ama doğada "bir" yoktur. Hatta doğada "bir elma" bile yoktur. Elmayla elmanın bulunduğu ortam arasındaki sınır tam belli değildir ki! Elmayla, elmanın bulunduğu ortam arasında sürekli molekül alışverişi vardır. Örneğin çürümeye yüz tutan bir elmanın tam ne zaman elmalıktan çıktığını söyleyebilir miyiz?

Her şey değiştiğinden, hiçbir şey olduğu gibi kalmadığından doğada "bir" yoktur. Doğada "bir" olmadığı gibi başka sayı da yoktur. Sayıları insanlar yaratmışlardır.

Ya sıfır? Sıfır var mıdır doğada? Sıfır, olmayan nesne sayısıdır. Olan nesneleri sayamadığımızı yukarda gördük, olmayan nesneleri saymak daha da zor olsa gerek[3]!

Matematiğin en temel kavramları doğada yoktur.

Matematiğin doğada olmadığı herhalde üç aşağı beş yukarı böyle savunulur.

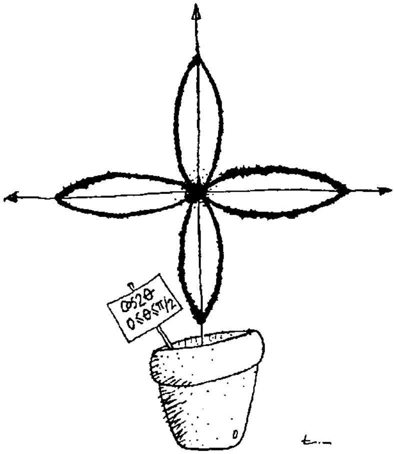
Bu felsefî hatta metafizik düşünceler hafife alınmamalı. Bir örnek daha vererek bu düşüncelerin yabana atılmaması gerektiğini göstereyim. Bildiğimiz uzayda iki nokta ele alalım. Bu iki nokta arasındaki uzay parçasının bir uzunluğu vardır. Diyelim 1 metre. Bu 1 metreyi ikiye bölebiliriz. Elde ettiğimiz iki yarım

---

2 Bu sayı 1'e eşittir.

3 Yoksa daha mı kolay? Evimdeki filleri saymak, evimdeki elmaları saymaktan daha kolay geliyor bana.

metrenin herbirini de ikiye bölebiliriz. Elde ettiğimiz çeyrek metreleri de ikiye bölebiliriz. Kuramsal olarak her sayıyı ikiye bölebileceğimizden, bölme işlemini sonsuza değin yapabiliriz. Sonsuza değin olmasa bile dilediğimizce bölme işlemini sürdürebiliriz. Böle böle, bir atomun, bir elektronun, adını bilmediğim birçok parçacığın boyutlarından daha küçük bir sayı elde ederiz. Oysa fiziksel uzay durmadan ikiye bölünmez. Zihinsel uzaklığı dilediğimiz kadar ikiye bölebiliriz, ama fiziksel uzayı dilediğimiz kadar ikiye bölemeyiz. Bir zaman sonra, fizik yasaları, hatta fiziğin kendisi ya da doğa, uzayı ikiye bölmemizi engeller. Demek ki iki nokta arasındaki fiziksel uzayla bu iki nokta arasındaki matematiksel (ya da zihinsel) uzaklık aynı şey değildir. Uzaklığı bölebiliyoruz ama uzayı bölemiyoruz. Dolayısıyla matematikle yaşadığımız fiziksel uzay tam bir uzlaşım içinde değildir.[4]



Matematiğin doğada olup olmadığı sorusu, matematiksel kavramların yaratı mı, yoksa keşif mi olduğu sorusuyla içiçedir.

Örneğin Amerika keşfedilmiştir, yaratılmamıştır; güneşin varlığı insanın varlığından bağımsızdır; yerçekimi insandan ve hatta yeryüzünden bağımsız vardır.

İnsan olmasaydı yerçekimi yasası bulunamazdı, ama bundan yerçekiminin olmadığı sonucu çıkmaz, hatta yerçekimi yasasının da insansız varolamayacağı sonucu çıkmaz.

4 Bu konu, bir önceki *Zenon'un Paradoksları* yazısında ele alınmıştır.

Öklid düzlemi, üçgen ve açı gibi geometrik kavramlar, grup, halka ve cisim gibi cebirsel yapılar, iki değerli (doğru ve yanlış değerli) mantık birer keşif midir, yoksa matematikçilerin yaratıları mıdır?

Bir başka deyişle matematik, Amerika anakarası gibi, güneş gibi, yerçekimi gibi, bizim dışımızda var mıdır? Matematiksel kavramların varlıkları da insandan bağımsız mıdır?

Tartışma bizi zorunlu olarak bu sorulara da sürükleyecek.

Matematiğin doğada olup olmadığı sorusunu yanıtlamak için, her şeyden önce doğayı tanımlamalıyız. Doğa ne demektir? Doğa tanımlanmadıkça, matematiğin doğada olup olmadığı sorusu tam anlamı olmayan, ancak sezgiyle kavranabilen bir soru olarak kalacaktır.

Bu yazıda doğayı tanımlamaya kalkışmayacağım. Çünkü bu yazının amacı doğayı tanımlamak değil, "doğa" kavramına açıklık getirmek. Bu yazıda, matematiğin doğada bulunmadığını savunanların doğa kavramını sorgulayacağım. Bu kavramın daha geniş tutulması gerektiğini, matematiğin doğada olmadığına inananların oldukça basitleştirilmiş ve bence eksik bir doğa kavramına sahip olduklarını ve ne derece soyut olursa olsun, matematiği matematikçinin yaratmadığını ama keşfettiğini, yani matematiğin insandan bağımsız varolduğunu savunacağım.

Her ne denli "doğa" sözcüğünü tanımlamayacaksam da, sözcüğü çok geniş anlamda kullandığımı belirtmeliyim. "Doğa" sözcüğü salt yaşadığımız dünyayı ve yakın çevresini kapsamıyor bu yazıda. Çok daha geniş anlamda kullanıyorum sözcüğü. Belki de "doğa" yerine "evren" ya da "dışdünya" demem daha doğru olurdu.

2. Matematiğin Kaynağı Doğadır. Matematiğin doğada olup olmadığı sorusunu bir yana bırakalım önce. Matematik ve matematiksel kavramlar -doğada veya bir başka yerde- var mıdır? Bu soruyu ele alalım.

Hiç kuşku yok ki matematiksel kavramlar vardır. Matematikçilerin uydurması olarak bile olsa, matematik ve matematiksel kavramlar vardır. "Bir" kavramı, "çember" kavramı, "π" kavramı vardır. Matematiksel kavramlar -doğada olsunlar veya olmasınlar, matematikçilerin yaratısı olarak bile olsa, düşünce olarak bile olsa, soyut düzeyde bile olsa- vardırlar. Matematikçiler bu kavramları tanımlamışlardır. Bundan kuşkumuz yok. Zaten bu kavramlar olmasaydı matematiksel kavramların doğada olup olmadıkları sorusu sorulmazdı bile. Doğruluğu apaçık belli olan bu sözlerde derin bir gerçek aramasın okur, herkesin bildiğini yineliyorum.

Bu varolan kavramlar yoktan mı varolmuştur? Yoktan hiçbir şeyin varolmayacağını biliyoruz (!) En soyut düşünceler bile somuttan kaynaklanır. Matematiksel kavramlar da yoktan varolmamıştır. "Saf düşünce ürünü" diye bir şey yoktur, olamaz. Her düşünce ürünü bizim dışımızdaki gerçeklerden kay-

naklamr. Sanatta olsun, bilimde olsun, felsefede olsun, her soyut düşüncenin, her kavramın ana kaynağı doğadır, evrendir, bizim dışımızdaki dünyadır. Bunun tersini düşünmek yoktan bir şeyin varolabileceğini düşünmek olur.

Her düşünce ürünü gibi matematiğin de kaynağı dış dünyamızdır. Yani matematik dış dünyadan tamamıyla bağımsız değildir. Matematik olmasa bile, en azından matematiğin ana kaynağı matematikçinin dışındadır.

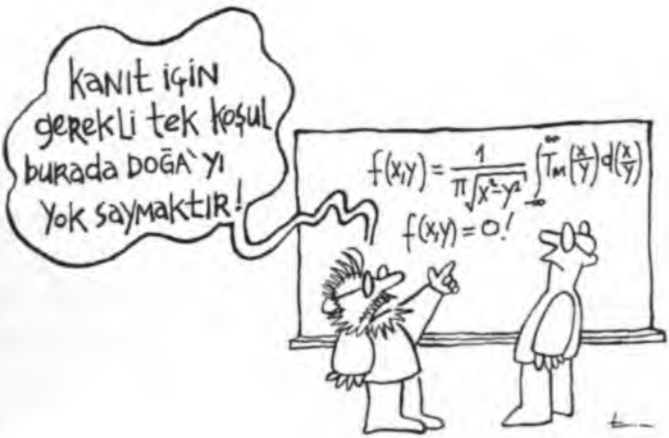
3. Matematik ve Teknoloji. Günümüzün ileri teknolojisine matematik sayesinde eriştiğimiz gözönüne alınınca, matematiğin büsbütün doğadan bağımsız olmadığı da belli oluyor zaten. Matematiğin çok soyut kavramları bile zamanla uygulama alanı bulabiliyor. Bu da, elbette, matematiğin doğayı üç aşağı beş yukarı kavrayabildiğini, betimleyebildiğini, doğanın yasalarını gerçeğe oldukça sadık kalarak kâğıda dökebildiğini gösterir. Demek ki matematik, bir ölçüde bile olsa, doğayı anlamamızı sağlıyor. Doğada "bir" olsun veya olmasın, matematikteki "bir" kavramıyla mucizeler yaratılıyor: Uzaya gidiliyor, gökdelenler dikiliyor, uydular aracılığıyla dünyanın bir köşesiyle ses ve görüntü bağlantısı kuruluyor... Matematik doğanın yasalarını ve mantığını anlamaya çalışan ve bunda da çok başarılı olan bir bilim dalı ve bir uğraştır.

Bu teknolojik gelişmelerin soyut matematikle değil, fizikle, kimyayla, mühendislikle ve uygulamalı matematikle gerçekleştiği ileri sürülebilir. Bu sav hem doğrudur hem yanlış. Bir yandan kuramsal ve soyut matematik en beklenmedik anda uygulama alanı bulabilmektedir, öte yandan gelecekte bile nasıl uygulanacağı bilinmeyen matematiksel araştırmalar yapılmaktadır. Aynı durum kuramsal fizik için de geçerlidir. Kaldı ki, teknolojiye uygulanan fizik, kimya ve mühendislik de ilk önce kâğıt üzerinde yapılıyor, uygulamaya sonra geçiliyor.

Şimdilik şunu aklımızda tutalım: 1) Uygulanan matematik vardır, 2) Bugün uygulama alanı bilinmeyen soyut matematik vardır ve yapılmaktadır, 3) Bugün uygulama alanı bulamayan matematik gelecekte doğrudan ya da dolaylı olarak uygulama alanı bulabilir (bulamayabilir de.)

4. Matematik Doğayı Yorumlar. İkinci bölümde matematiğin kaynağının bizim dışımızdaki dünya olduğunu söyledim. Bu savım yanlış anlaşılmasın: Beynimizin dışdünyayı, bizim dışımızdaki gerçeği yorumlamadığını söylemiyorum. Cézanne'ın elmaları ve manzaraları, Picasso'nun ölüdoğaları (natürmortları) ve çıplakları doğanın aynen resmedilişi değildir, bir yorumdur. Matematik de resim gibi doğayı yorumlar. Örneğin iki nokta arasındaki uzay parçası matematikte bir sayıyla (iki nokta arasındaki uzaklıkla) ifade edilir. Elbette bir sayı ile bir uzay parçası arasında ayrım vardır. Burda bir yorum sözkonusudur.

Bir başka örnek vereyim: beş metre uzunluğunda bir cetvel üzerinde π'nin yerini tam olarak gösteremeyiz. O zaman doğada fiziksel anlamda π sayısının olup olmadığını nerden biliyoruz? π sayısının varlığına inanmak, aslında fiziksel uzunluk kavramının ne olduğunu bildiğini sanmak demek değil midir?



Biraz daha ileri gideyim. Doğada, fiziksel anlamda, 0'dan büyük ama 1/2'den, 1/3'ten, 1/4'ten ve genel olarak her $n > 0$ tamsayısı için $1/n$'den küçük bir sayının olmadığını kabul ediyoruz. Yani, sonsuz küçük sayıların doğada fiziksel anlamda olmadıklarını kabul ediyoruz. Neden? Doğada fiziksel anlamda sonsuz küçük sayıların olmadığı nerden belli? Belki sonsuz küçük sayılar var da biz (sonsuz küçük olduklarından) gözlemleyemiyoruz. Böyle bir olasılık vardır. Hiç kimse bize doğada sonsuz küçük sayıların olmadığına güvence veremez[5].

Demek istediğim, doğadaki uzunlukların bildiğimiz gerçel sayılarla ölçülebileceği varsayımının doğanın bir yorumu olduğudur.

Son bir örnek daha vereyim. Matematikte 3 sayısı {0, 1, 2} kümesi olarak, 2 sayısı {0, 1} kümesi olarak, 1 sayısı {0} kümesi olarak tanımlanır. 0 sayısıysa Ø olarak, yani boşküme olarak tanımlanır. Görüldüğü gibi sayıların matematiksel tanımı bir yorumdur. "Üç"ün bir küme olarak tanımlanması ve hele {0, 1, 2} kümesi olarak tanımlanması için görünürde bir neden yoktur[6].

Demek ki matematik doğayı yorumlar, tam olarak betimlemez. Bu yorum kusursuz bir yorum olmayabilir, ama bir önceki bölümde de savunduğum gibi büsbütün kusurlu da değildir.

5. Modern Matematik Bir Zorunluluktur. Nokta, doğru, çember, π, 1, 2, 3 gibi kavramların doğada bulunduğuna inanan, ancak modern matematiğin doğada bulunduğuna inanmayanlar olabilir. Bu düşünceyi de paylaşmıyorum. Bu bölümde modern matematiğin bir zorunluluk olduğunu savunacağım.

---

5 Matematikte sonsuz küçük sayıların bulunduğu sayı sistemleri de vardır.

6 Modern matematikte her şey bir kümedir. Dolayısıyla "3" de bir küme olarak tanımlanmalıdır. 3'ü, üç öğesi olan bir küme olarak tanımlamak ilk akla gelendir elbet. Üç öğeli birçok küme vardır. 3'ü tanımlamak için bu üç öğeli kümelerden hangisini seçmeliyiz? Tümevarımla 3'ten küçük doğal sayıları tanımladığımızı varsayarsak, {0, 1, 2} kümesi en "doğal" seçimdir.

Modern matematik matematik tarihinden soyutlanarak ele alınırsa, modern matematiğin yapay bir uğraş alanı olduğu kanısına varılabilir. Günümüzün soyut matematiğinin bir zorunluluk olduğunu anlamak için matematik tarihini incelemeliyiz. Çünkü matematiğin her kavramı daha önce tanımlanmış başka kavramlardan kaynaklanır ve bulunan her yeni kavram başka kavramların bulunmasına neden olur. Matematiğin her kavramının bir temeli, bir geçmişi, varoluşunun bir gerekçesi vardır. Hiçbir matematikçi durup dururken yeni bir kavram üretmez. Matematikçilerin tanımladıkları her kavram bir gereksinim sonucudur.

Örneğin, doğru ve çember kavramlarından eğri kavramı, eğri kavramından süreklilik, limit ve türev kavramları, bu kavramlardan sonsuz küçük kavramı, sonsuz küçük kavramından sonsuz büyük kavramı doğar. Sayılar kavramından polinom ve cisim kavramları, bu kavramlardan grup kavramı doğar. Uzaklık kavramından topolojik uzay kavramı, topolojik uzay ve türev kavramlarından çokkatlı (manifold) kavramı doğar.

Bir örnek daha vereyim. Diyelim ilkel bir toplum 20'ye değin saymasını biliyor ve 20'den büyük sayılar için "çok" terimini kullanıyor. Bu ilkel toplumun 21, 22, 23 sayılarım zamanla öğreneceğinden kuşkumuz olmamalı. 20'ye dek sayabilmek belli bir zekânın göstergesidir. 20'ye değin sayabilen bir toplumun 21'i öğrenemeyeceğini düşünemeyiz. Bu ilkel toplum gel zaman git zaman 21'i, 22'yi, 23'ü öğrenecek, hatta "artı 1" kavramına ulaşacaktır. Arkası kendiliğinden gelir. "Artı 1" kavramına ulaşan bir toplum kolaylıkla evrendeki "parçacık" sayısından daha büyük sayılara ulaşır. Oysa evrende böyle bir sayı fiziksel olarak yoktur, ama "artı 1" soyutlaması bu sayıyı "yaratır". Fiziksel olarak evrende bulunmayan bu çok büyük sayılardan "sonsuz" kavramına varmak zor değildir.

Ben gerçekten de "sonsuz" ve "artı 1" soyutlamasına erişmek için 20'ye değin sayabilmenin yeterli olduğuna inanıyorum. 20'ye değin sayabilen toplumların, salt bu kavramları de-

ğil, ne derece soyut olursa olsun, her matematiksel kavramı bir zaman sonra bulacağına inanıyorum.

Yukarda, her kavramın bir başka kavramdan doğduğunu söyledim. Biraz daha ileri gideyim: Matematikçi tanımlayacağı kavramları karşısında tanımlanmaya hazır bulur. Dahaca tanımlanmamış kavramlar matematikçinin kâğıtları arasından sırıtır. Bu kavramı görmek matematikçi için bir zaman sorunudur. Örneğin "asal sayı" kavramı tamsayılarla uğraşan herkesin karşısına çıkar. Asal sayı kavramı bir matematikçinin durup dururken birdenbire bulduğu bir kavram değildir. Sayı kavramı asal sayı kavramını içinde taşır. Sayıları anlamak isteyen her akıllı yaratık, asal sayı kavramını bulmak zorundadır.

Her matematiksel kavram daha önce bulunmuş matematiksel kavramlardan kaçınılmaz olarak doğar.

Ayrıca, matematiksel kavramlar kendilerini matematiğin salt bir dalında göstermezler. Aynı kavram, birbiriyle ilintisiz gibi görünen birçok araştırmada, birçok matematik dalında ortaya çıkabilir. π sayısı buna güzel bir örnektir. π'nin rastlanmadığı matematiksel konu yok gibidir.

Sonuç olarak, modern matematiğin doğada varolduğunu kanıtlamak için, nokta gibi, doğru gibi, 1, 2, 3 gibi, 0 ve π gibi, sonsuzluk gibi temel matematiksel kavramların doğada varolduklarını kanıtlamam gerekiyor. Matematiğin bu başat kavramlarının doğada varolduklarını kanıtlayabilirsem, bu kavramların zorunlu bir sonucu olan çok soyut matematiksel kavramların da doğada olduklarını kanıtlamış olacağım.

6. Matematik Doğada Vardır. Dördüncü bölümde, matematiğin gözlemlediğimiz doğayı yorumladığını savundum. Şimdi bu yorumun zorunlu olduğunu, bir seçeneğimizin olmadığını savunacağım. Matematik söz konusu olduğunda, doğayı nasıl yorumlamamız gerektiğini doğa kendisi bize söylemektedir. Çeşitli yorumlardan birini seçmek sözkonusu değildir.

Daha önce sözünü ettiğim "doğada **bir elma** yoktur" düşüncesini ele alalım. "Doğa" sözcüğü çok kısıtlı bir anlamda anlaşıldığında bu düşünce doğru olabilir. Doğada bir değil, birçok elmanın olduğu ve hatta her elmanın her an değiştiği, elmayla ortam arasındaki sınırın bile tam olarak bilinemeyeceği savunulabilir. Dolayısıyla, "bir elma" yoktur denilebilir.

Ancak bu doğa anlayışını kabul ettiğimizde, doğa, parçalara ayrılamayan, durmadan değişen, bir türlü gözlemlenemeyen ve kavranamayan, elle tutulmaz, dille anlatılmaz, yazıyla betimlenmez bir bütün olur. Hatta böyle bir doğa anlayışından doğada doğanın kendisinden başka hiçbir şeyin olmadığı sonucu çıkabilir. Eğer doğa gerçekten anlaşılamayan bir bütünse, o zaman bir sorun yok. Ama doğanın hiç de anlaşılamayan bir şey olduğunu sanmıyorum. Barajlarla selleri, paratonerlerle yıldırımları önlüyoruz. Yerçekimini yeterince anlamış olmalıyız ki, uçaklar, jetler, füzeler yapıp yerçekimine karşı gelebiliyoruz.

Dolayısıyla bu doğa anlayışı pek doğru olmamalı. Doğayı anlamak demek, doğanın bütün sırlarına erişmek demek olmamalı. Her ne denli doğa hâlâ daha gizemliyse de, doğayı biraz olsun kavrayabiliyoruz. Matematik, doğayı -yaklaşık olarak bile olsa- anlamamızı sağlıyor. Teknolojik gelişmeler bunun bir kanıtıdır.

Doğa yalnızca gördüklerimiz, duyduklarımız, kokladıklarımız, duyumsadıklarımız değildir. Doğanın bize sezdirdikleri de vardır. Örneğin, matematiksel doğru doğada fiziksel olarak bulunmayabilir, ama doğru düşüncesi (kavramı) doğada vardır ve doğa bize doğru kavramını sezdirtir. Upuzun bir ağaç, denizle gökyüzünü ayıran çizgi, güneş ışınları doğru kavramını fısıldarlar. Bal peteğinin hücreleri matematiksel altıgeni, gece gördüğümüz yıldızlar matematiksel noktayı, ay, güneş ve gezegenler matematiksel çemberi ve küreyi fısıldarlar. Gezegenlerin yörüngesi elipsi ve genel olarak eğriyi fısıldar. Geçen günler, mevsimler ve yıllar, bir ormandaki ağaçlar, bir bitkinin yaprakları, 1, 2, 3 gibi sayı kavramlarını fısıldarlar. Bu fısıltı biz insanlardan bağımsız vardır. Bu fısıltıyı duyabilecek varlık olmasa da fısıltı vardır.

Doğada "işte!" diye gösterebileceğimiz bir "bir" olmayabilir. Ama doğa bize "bir" kavramını fısıldar. Avustralya ve Aftika'nın yerlileri de, Aztekler de, İnkalar da, Batı kültürüyle tanışmamış olmalarına karşın, 1'i, 2'yi 3'ü bulmuşlardır. Demek ki doğanın bu fısıltısını duymak yalnızca bir uygarlığa özgü değildir, her uygarlık bu fısıltıyı duyabilir.

Arı peteğinin her hücresi kusursuz bir altıgen olmayabilir. Ama arı, peteğinin hücresini yaparken hücrenin altıgen olmasına çalışır. Sabun köpüğü mükemmel bir küre olmayabilir, ama sabun köpüğü mükemmel bir küre olmaya çalışır. Sonsuz küçük sayılar fiziksel olarak olsa da olmasa da, bu sayılar doğada düşünce/fısıltı olarak vardırlar, örneğin durmadan küçülen ama hiçbir zaman sıfır olmayan 1/2, 1/3, 1/4, 1/5... dizisi bize sonsuz küçüğü anlatır ya da anlatmaya çalışır.

7. Sonuç. Sonuç olarak, en temel matematiksel kavramların açıklamaya çalıştığım anlamda doğada bulunduğuna inanıyorum. Ve matematiğin en derin, en soyut kavramlarının doğanın bize sunduğu en temel kavramlardan bir zorunluluk sonucu

doğduğuna inanıyorum. Ayrıca her kavramın bağrında başka kavramlar barındırdığına inanıyorum.

Matematik, matematikçilerden ve insanlardan bağımsız olarak vardır. Pisagor diküçgenleri yaratmamıştır, keşfetmiştir. Galois, grupları yaratmamıştır, keşfetmiştir. Noether, halkaları yaratmamıştır, keşfetmiştir. Hilbert, Hilbert uzaylarını yaratmamıştır, keşfetmiştir...

Matematiğin evrenselliğine inanıyorum. Kanıma göre matematik, hem insanlardan hem de belli bir kültürden ve uygarlıktan bağımsızdır.

Yanlış anlaşılmak istemem: Askeri amaçlarla yapılan matematiksel araştırmalar matematiğin belli bir dalının erken gelişmesine neden olabilir; Arşimet gibi, Gauss gibi, Newton gibi dehalar kişisel çabalarıyla matematiğin daha çabuk gelişmesini sağlamış olabilirler; hatta, ataerkil bir toplum olmasaydık, günümüzün matematiği biraz daha değişik olabilirdi. Bunları yadsımıyorum. Gene de her düşünen toplumun bugün bildiğimiz matematiği er ya da geç bulacağına (keşfedeceğine) inanıyorum.

Kısacası matematiğin doğada bulunduğuna inanıyorum.

8. Hardy'nin Düşünceleri. Böylesine önemli bir konuda son sözü söylemek bana düşmez. Ünlü matematikçi G. H. Hardy'nin konumuzla ilgili yazdıklarını aktararak bitireyim yazımı[7]:

> Fiziksel gerçekle maddi dünyayı; gecesi gündüzü olan, depremleri olan, ay ve güneş tutulmaları olan dünyayı; fiziksel bilimlerin anlatmaya çalıştığı dünyayı kastediyorum. [...] Benim için ve sanırım çoğu matematikçi için "matematiksel gerçek" diye tanımlayacağım başka bir gerçek vardır. Bu matematiksel gerçeğin niteliği hakkında gerek matematikçiler ge-

7 Bkz. Kaynakça [7].

> rek felsefeciler arasında herhangi bir uzlaşma yoktur. Bazılarına göre "zihinsel"dir ve onu bir bakıma biz yaratırız; diğerleri ise onun bizim dışımızda ve bizden bağımsız olduğu kanısındadır. Matematiksel gerçeğin ne olduğunu, inandırıcı bir şekilde açıklayabilecek bir kimse metafiziğin en zor problemlerinin çoğunu çözmüş olurdu. [...] Benim inancıma göre, matematiksel gerçeklik bizim dışımızdadır; bizim işlevimiz onu bulup çıkarmak ya da gözlemektir; ıspatladığımızı veya tumturaklı sözlerle **yarattığımızı** söylediğimiz teoremler; gözlemlerimizden çıkardığımız sonuçlardan ibarettir. Bu görüş Platon'dan bu yana bir çok ünlü filozof tarafından da benimsenmiştir.

Hardy, aynı kitabın 24'üncü bölümünde matematiksel gerçeklikle fiziksel gerçekliği karşılaştırıyor:

> [...] matematiksel objeler [nesneler], çok daha göründükleri gibidirler. Bir iskemle veya bir yıldız hiç de göründüğü gibi değildir; üzerlerinde ne kadar çok düşünürsek, görüntüleri de, duyularımızdan kaynaklanan bir sis içinde, o ölçüde netliğini kaybeder, bulanıklaşır. Buna karşılık, "2" veya "317"nin duyularla ilişkisi yoktur; yakından incelediğimiz ölçüde özellikleri daha da berraklaşır. [...] pür matematik, tüm idealizmin çarpıp battığı bir kayadır. 317 bir asaldır; biz öyle düşünüyoruz diye, veya kafa yapımız şu ya da bu şekilde olduğu için değil; **çünkü öyledir**, çünkü matematiksel gerçeğin yapısı bu.

Kaynakça

[1] M. Bar-Hillel ve A. Margalit, *Newcomb's paradox revisited*, British Journal of Science 19, (1965), sayfa 317-343.

[2] Steven Brams, *A problem in prediction*, Paradoxes in Politics: An Introduction to the Nonobvious in Political Science'ın 8'inci bölümü, New York, Free Press, 1976.

[3] Steven Brams ve Philipp Straffin, *Prisoner's dilemma and professional sports drafts*, American Mathematical Monthly 86 (1979), sayfa 80-88.

[4] J. T. Fletcher, Mathematical Gazette, 1952.

[5] Martin Gardner, *Scientific American* dergisinin Mathematical Games bölümünde, Temmuz 1973 ve Mart 1974 sayıları.

[6] Martin Gardner, aha! Gotcha, Paradoxes to puzzle and delight, W.H. Freeman and Company, sayfa 28-29, 1982.

[7] G.H. Hardy, Bir Matematikçinin Savunması, Bölüm 22, Çeviren Nermin Arık, Tübitak Popüler Bilim Kitapları Dizisi 3, 1994.

[8] Ross Honsberger, Mathematical Gems, Dolciani Mathematical Expositions, No. 1, The Mathematical Association of America, 1973.

[9] Ross Honsberger, Ingenuity in Mathematics, Mathematics, Dolciani Mathematical Expositions, No. 1, Mathematical Association of America, 23.

[10] Isaac Levi, *Newcomb's many problems*, Theory and Decision 6 (1975) sayfa 161-175.

[11] Ali Nesin, Matematik ve Korku, TMD Yayınları, 2007.

[12] Robert Nozick, *Newcomb's problem and two principles of choice*, Essays in Honor of Carl G. Hempel'de, editör: Nicholas Rescher, Atlantic Highlands, New Jersey, Humanities Press, 1970.

[13] Robert Nozick, *Reflections on Newcomb's Problem*, *Scientific American* dergisinin Mathematical Games bölümünde, Mart 1974.

[14] Jean Renoir, **Sinemacı Jean Renoir Ressam Renoir'ı Anlatıyor**, Düşün Yayıncılık, Özyaşam Öyküsü ve Anılar Dizisi 7, 1996.

[15] Edward Rozema, *Round-off, batting averages, and ill-conditioning*, The College Mathematics Journal, cilt 25, sayı 4, Eylül 1994, sayfa 314-317.

[16] Wesley E. Salmon, **Zeno's Paradoxes**, The Library of Liberal Arts, The Bobbs-Merrill Company, Inc. Indianapolis ve New York, 1970.

[17] Philip D. Straffin, **Game Theory and Strategy**, The Mathematical Association of America, New Mathematical Library 36, 1993.

Ali Nesin

Matematik ve Doğa

Zenon'un paradoksları... "Doğada matematik var mı? Matematiksel kavramlar yaratı mı, yoksa keşif mi?" gibi felsefi sorular, "Birey ne derece özgür olabilir?" sorusunun matematikçesi...

Ayrıca olasılık kuramı, oyunlar, geometri, kombinatoryal hesaplar, sayılar kuramı, aritmetik...

Ali Nesin Matematik ve Doğa kitabında tüm bu konuları rahat ve akıcı bir dille ele alıyor.

Matematiğin çeşitli alanlarına heyecanlı bir yolculuk yapmak isteyenler, matematiği seven ya da sevmek isteyenler için birbirinden bağımsız on sekiz yazıdan oluşmuş bir kitap.

17?0069
ANY

12,00 TL (KDV dahil)

ISBN 978-975-9038-90-8
9 789759 038908 068

NESİN MATEMATİK KÖYÜ